

Matematinio samprotavimo užduotys

III – IV gimnazijos klasėms

Užduočių rinkinys skirtas matematinio samprotavimo gebėjimų ugdymui III – IV gimnazijos klasių mokiniams pagal atnaujintas Bendrąsias programas

TURINYS

I VADAS	4
III GIMANZIJO KLASĖ, BENDRASIS KURSAS, SKAIČIAI IR SKAIČIAVIMAI	6
ŠIKŠNOSPARNIŲ RŪŠYS	7
ŽEMĖS DYDIS	11
ROBOTINĖS RANKOS MATEMATIKA	16
SLAPTAŽODŽIŲ APSAUGA	22
PROGRAMAVIMO ĮDOMYBĖS.....	27
III GIMANZIJO KLASĖ, BENDRASIS KURSAS, MODELIAI IR SĄRYŠIAI.....	32
KVADRATINIŲ FUNKCIJŲ GRAFIKAI	33
LOGARITMINĖ PH SKALĖ	38
LAIPTŲ SPIRALĖ	43
PROGRESINIS ATLYGINIMAS	48
VIRUSŲ PLITIMO MODELIAVIMAS.....	52
TEMPERUOTAS DERINIMAS.....	56
VAISTŲ KONCENTRACIJA ŽMOGAUS ORGANIZME	60
PATIRTIES TAŠKAI ŽAIDIMUOSE	64
AUTOMATINĖ LAISTYMO SISTEMA	68
III GIMANZIJO KLASĖ, IŠPLĖSTINIS KURSAS, SKAIČIAI IR SKAIČIAVIMAI	73
IRACIONALIEJI SKAIČIAI	74
REALIEJI SKAIČIAI	78
MS-12-432. ŠIAUDINĖ SKRYBĖLĖ (11 KL.)	82
III GIMANZIJO KLASĖ, IŠPLĖSTINIS KURSAS, MODELIAI IR SĄRYŠIAI	87
PUSIAUSVYROS TAŠKAI	88
IŠMANUS FONTANAS	93
IV GIMANZIJO KLASĖ, BENDRASIS KURSAS, MODELIAI IR SĄRYŠIAI	99
TŪRIO IŠVESTINĖ.....	100
GĖLYNO PLANAS 2	104
IV GIMANZIJO KLASĖ, BENDRASIS KURSAS, GEOMETRIJA IR MATAVIMAI	108
DIDŽIOJO SPROGIMO TEORIJA	109
RUTULIŲ SUPAKAVIMAS	114
ANTENŲ TINKLO PLANAVIMAS	119
ŠIAUDINIŲ SODŲ GEOMETRIJA	124
TORTAS IŠ KEPYKLĖLĖS	130
IV GIMANZIJO KLASĖ, BENDRASIS KURSAS, DUOMENYS IR TIKIMYBĖS	135
MONETOS METIMAI.....	136
IQ TESTAS	141
MOKYKLOS RENGINYS LAUKE	146
IV GIMANZIJO KLASĖ, IŠPLĖSTINIS KURSAS, MODELIAI IR SĄRYŠIAI	150
KANTORO DULKĖS 2	151
DAŽŲ SKIEDIMO METODAS.....	156

GĖLIŲ NEKTARAS	160
AUTOMOBILIO GREIČIO TESTAS	164
ORO TARŠA MIESTE.....	168
SPINDULIŲ SEKIMAS 3D ANIMACIJOJE.....	172
STOGO NUOLYDIS	176
IV GIMANZIJOS KLASĖ, IŠPLĖSTINIS KURSAS, GEOMETRIJA IR MATAVIMAI.....	182
BORUŽĖLĖ	183
VANDENILIO MOLEKULĖ.....	192
VAZONO UŽPILDYMAS	196
ŠVYTURIO RESTAURACIJA.....	201
IV GIMANZIJOS KLASĖ, IŠPLĖSTINIS KURSAS, DUOMENYS IR TIKIMYBĖS	206
TIKIMYBINIAI BANDYMAI SU SKIRTINGŲ SPALVŲ RAŠIKLIAIS	207
POKEMONŲ GAUDYMAS.....	211
STAČIAKAMPIŲ SKAIČIUS.....	218
NESIMETRIŠKA MONETA	224
KLASIKINĖ MONETA	229
PIKSELIAI	233
KOMPIUTERINIAI ŽAIDIMAI IR SPORTAS.....	238
VEIDRODINIAI SKAIČIAI	243
UNIVERSITETO STOJAMASIS BALAS	248

Šis dokumentas parengtas įgyvendinant Nacionalinės švietimo agentūros projektą „Skaitmeninė švietimo transformacija („EdTech“)\”, kurio tikslas – tobulinti mokymo(si) turinį ir priemones, siekiant ugdyti XXI amžiaus gebėjimus. Dokumente pateikiamos užduotys skirtos III – IV gimnazijos klasių mokiniams ir yra orientuotos į matematinio samprotavimo gebėjimų ugdymą, kaip tai apibrėžta atnaujintoje Matematikos bendrojoje programoje.

Matematinio samprotavimo svarba

Atnaujinta Matematikos bendroji programa akcentuoja, kad matematika nėra tik formulės ar skaičiavimai – tai būdas mąstyti, daryti išvadas, pagrįsti sprendimus. Matematinis samprotavimas reiškia gebėjimą suprasti ryšius tarp objektų ir reiškinių, pastebėti dėsningumus, juos analizuoti, paaiškinti ir pagrįsti, kodėl tam tikras sprendimas yra tinkamas. Šie įgūdžiai būtini ne tik mokantis matematikos, bet ir sprendžiant realaus gyvenimo uždavinius, priimant atsakingus sprendimus.

Šiose užduotyse matematinis samprotavimas ugdomas per:

- loginį argumentavimą,
- aiškinimą, kodėl atsakymas teisingas,
- paprastų problemų nagrinėjimą įvairiuose kontekstuose.

Matematinio samprotavimo užduotys sudarytos atsižvelgiant į atnaujintos bendrosios programos tikslus, kurie pabrėžia gebėjimą kelti klausimus, ieškoti ryšių, taikyti skirtingas strategijas sprendžiant problemas, taip pat paaiškinti ir pagrįsti savo sprendimo kelią.

Dokumento struktūra

Dokumente pateikiami parengti užduočių pavyzdžiai, skirti III – IV gimnazijos klasių mokiniams. Užduotys **suskirstytos pagal klasę ir mokymosi turinio sritį** (pvz.: Modeliai ir sąryšiai, Geometrija ir matavimai, Duomenys ir tikimybės). Kiekviena užduotis pateikiama šia struktūra:

- **Užduoties pavadinimas:** trumpa tema ar situacijos santrauka.
- **Bendroji įvestis:** trumpas kontekstas, supažindinantis mokinį su situacija ir įtraukiantis į uždavinio aplinką.
- **Užduočių klausimai:** jų gali būti nuo 2 iki 4 sudėlioti nuo paprastesnio iki sudėtingesnio, skatinantys samprotauti.
- **Vertinimo instrukcija:** aprašyta, už ką skiriami taškai.
- **Pagalba mokiniui:** užuominos, padedančios eiti link sprendimo.

- **Metaduomenų lentelė:** klasė, turinio sritis, pasiekimų sritis, pasiekimų lygis ir taškų skaičius.

Užduočių apimtis

Šiame dokumente pateikiamos **50** matematinio samprotavimo užduočių, skirtų III – IV gimnazijos klasių mokiniams. Užduotys suskirstytos pagal klases: pirmiausia pateikiamos užduotys III (gimnazijos klasės užduotys, po jų – IV gimnazijos klasei. Kiekvienoje klasėje užduotys išdėstytos pagal kursą ir Bendrųjų programų (BP) sritis, siekiant užtikrinti aiškią struktūrą ir sudaryti galimybę greitai rasti užduotis pagal atitinkamą turinį.

Dokumentas skirtas naudoti mokymo(si) procese, rengiant užduotis mokinių matematinio samprotavimo gebėjimams ugdyti ir vertinti.

III GIMANZIJOS KLASĖ, BENDRASIS KURSAS, SKAIČIAI IR SKAIČIAVIMAI

Šikšnosparnių rūšys

Bendroji įvestis

Paprastai kuo didesnio ploto yra tyrinėjama teritorija, tuo daugiau gyvūnų rūšių joje turėtų būti. Ekologijos srityje šis reiškinyss dažnai modeliuojamas laipsniniais reiškiniais. Juos taikant pagal vietovės plotą galima gana tiksliai nustatyti, kiek skirtingų gyvūnų rūšių joje galėtų gyventi.

Pavyzdžiui, atlikus mokslinį tyrimą, nustatyta, kad Centrinės Meksikos olose gyvenančių šikšnosparnių rūšių skaičių N galima apytiksliai apskaičiuoti tokiu reiškinium:

$$N = 0,14 \cdot S^{0,64},$$

kur S yra olos vidinis plotas (kvadratiniais metrais). Į šį reiškinį įsistačius S , atlikus skaičiavimus ir rezultatą suapvalinus iki sveikojo skaičiaus, gaunamas gana tikslus įvertis, kiek skirtingų rūšių šikšnosparnių galėtų toje olose gyventi.

Užduotys

1 užduotis

Olos vidinis plotas yra $S = 60 \text{ m}^2$. Pasinaudokite pateikta formule ir įvertinkite, kiek skirtingų šikšnosparnių rūšių galėtų joje gyventi.

2 užduotis

Manykime, kad **ola yra tinkamo ploto šikšnosparniams gyventi**, jeigu jai galioja nelygybė $N \geq 0,5$. Pasinaudokite pateikta formule ir apskaičiuokite, kokio dydžio olos **nebus** tinkamo ploto šikšnosparniams gyventi. Atsakymą pateikite kvadratiniais metrais dviejų skaitmenų po kablelio tikslumu.

3 užduotis

Jeigu olos plotą padidintume 10 kartų, kiek kartų padidėtų joje galinčių gyventi šikšnosparnių rūšių skaičiaus įvertis? Atsakymą pateikite dviejų skaitmenų po kablelio tikslumu.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
$N = 0,14 \cdot 60^{0,64}$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą pritaikyti sąlygoje duotą formulę.
$N \approx 1,92373 \approx 2$.	1	Už teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
$0,14 \cdot S^{0,64} \leq 0,5$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą sudaryti nelygybę, pritaikant duotą formulę.
$S \leq \left(\frac{0,5}{0,14}\right)^{1/0,64}$.	1	Už teisingą nelygybės sprendimą.
$0 \leq S \leq 7,31 \text{ m}^2$.	1	Už užrašytą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Pirmi du taškai skiriami ir tuo atveju, jei sprendžiama lygtis $0,14 \cdot S^{0,64} = 0,5$. Tačiau trečiasis taškas skiriamas tik už nelygybę (iš abiejų pusių).		

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
$N = 0,14 \cdot (10 \cdot S)^{0,64}$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą pritaikyti duotą formulę.
$\frac{0,14 \cdot (10 \cdot S)^{0,64}}{0,14 \cdot S^{0,64}} = 10^{0,64} \approx 4,37$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 uždutis

1 užuomina. Pasinaudokite duota formule $N = 0,14 \cdot S^{0,64}$. Kurį formulėje nurodytą dydį žinote iš sąlygos?

2 užuomina. Į formulę $N = 0,14 \cdot S^{0,64}$ įsistatykite S ir skaičiavimo mašinėlė apskaičiuokite dešinėje lygybės pusėje esantį reiškinį. Kokį rezultatą gaunate? Nepamirškite jo suapvalinti iki sveikojo skaičiaus.

2 uždutis

1 užuomina. Pasinaudokite duota formule $N = 0,14 \cdot S^{0,64}$. Ką iš sąlygos žinote apie dydį N ?

2 užuomina. Išspręskite nelygybę $0,14 \cdot S^{0,64} \leq 0,5$. Visų pirma pertvarkykite ją taip, kad atitiktų pavidalą $S^{0,64} \leq \dots$.

3 užuomina. Kokiu laipsniu reikia pakelti abi nelygybės $S^{0,64} \leq \dots$ puses, kad ji pavirstų nelygybe $S \leq \dots$?

4 užuomina. Prisiminkite, kad S negali būti neigiamas skaičius.

3 uždutis

1 užuomina. Kaip atrodys formulė $N = 0,14 \cdot S^{0,64}$, jeigu vietoje S įrašysite 10 kartų už S didesnį dydį?

2 užuomina. Kad rastumėte, kiek kartų padidėjo N , turite apskaičiuoti dviejų reiškinių santykį: rūšių skaičių N su padidintu S padalyti iš rūšių skaičiaus N su paprasta S reikšme.

3 užuomina. Kam lygus reiškinys $\frac{0,14 \cdot (10 \cdot S)^{0,64}}{0,14 \cdot S^{0,64}}$? Suprastinkite dalį narių, apskaičiuokite rezultatą ir pateikite atsakymą dviejų skaitmenų po kablelio tikslumu.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	11	Skaičiai ir skaičiavimai	Bendrasis	Laipsniai	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Laipsniai	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3
3				Laipsniai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	2

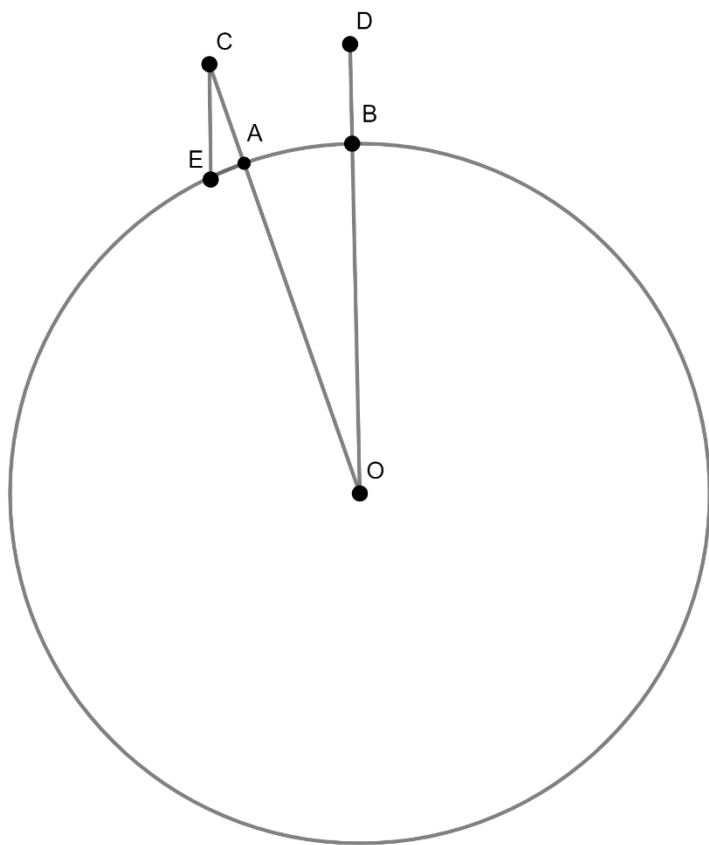
Žemės dydis

Bendroji įvestis

Vienas garsiausių senovės Graikijos matematikų Eratostenas pirmasis apskaičiavo Žemės dydį, spėdamas, kad Žemė yra rutulio formos. Prieš daugiau nei du tūkstančius metų jis sugalvojo geometrinį eksperimentą, kurį atlikęs išsiaiškino apytikslį Žemės spindulio ilgį.

Tam tikru momentu Egipto Aleksandrijos mieste aplink pastatus nesimato šešėlių, nes saulė būna tiesiai virš jų. Už 1000 km į pietus esančiame Asuano mieste tuo pačiu momentu pastatai meta šešėlius. Tarkime, kad 10 metrų aukščio pastatas meta 1,7 metro ilgio šešėlį.

Toliau esančiame brėžinyje pateikiama supaprastinta eksperimento schema. Joje Žemės centras pažymėtas tašku O, miestai atitinka taškus A ir B, pastatai – atkarpas AC ir BD, o šešėlis – atkarpą AE.



Užduotys

1 užduotis

Šešėlio ilgis AE yra nedidelis, todėl laikykime, kad tai tiesi linija, o trikampis AEC yra statusis.

Pagal aprašyme pateiktus dydžius apskaičiuokite kampo ACE tangento reikšmę. Tada pasinaudokite skaičiavimo mašinėle ir apskaičiuokite apytikslę kampo ACE reikšmę laipsniais. Pateikite ją dešimtųjų dalių tikslumu.

2 užduotis

Kadangi saulė yra santykinai labai toli nuo Žemės, tai galima daryti pagrįstą prielaidą, kad tiesės CE ir DO yra lygiagrečios. Kurio kampo tangento reikšmė didesnė – ACE ar AOD? Remkitės dviejų lygiagrečių tiesių savybėmis ir pagrįskite atsakymą, paminėkite, kaip tokie kampai vadinami.

3 užduotis

Atstumas tarp miestų yra didelis, todėl laikykime, kad AB – tai lankas apskritimo, kuris gaunamas plokštuma kertant Žemės rutulį per jo centrą ir taškus A ir B. Žemės rutulio spindulio OB ilgį žymėkime R.

Kampas AOB yra apytiksliai lygus 10° , o apytikslė π reikšmė yra 3,14. Apskaičiuokite R reikšmę. Suapvalinkite ją iki sveikojo skaičiaus kilometrų.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
$tg(\angle ACE) = \frac{AE}{AC}$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą išreikšti $tg(\angle ACE)$ per žinomus dydžius.
$tg(\angle ACE) = \frac{AE}{AC} = \frac{1,7}{10} = 0,17$.	1	Už teisingai apskaičiuotą $\angle ACE$ tangentą.
$\angle ACE = \arctg(0,17) \approx 9,6^\circ$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Atsakymas turi būti pateiktas laipsniais.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Kampų tangento reikšmės yra lygios: $tg\angle ACE = tg\angle AOD$.	1	Už teisingą atsakymą.
Tai yra vidaus priešiniai kampai.	1	Už paminėtą teisingą sąvoką „vidaus priešiniai kampai“.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Lanko AB ilgio ir apskritimo ilgio santykis: $\frac{AB}{2\pi R}$.	1	Už teisingai sudarytą reiškinių.
Kampo AOB ir pilnojo kampo santykis: $\frac{\angle AOB}{360^\circ}$.	1	Už teisingai sudarytą reiškinių.
$R = \frac{36 \cdot 1000}{2 \cdot 3,14} \approx 5732 \text{ km}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Jei užrašomuose reiškiniuose iškart įsistatomos AB, π ir $\angle AOB$ reikšmės, taškai taip pat skiriami.		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite, kam lygi stačiojo trikampio kampo tangento reikšmė.

2 užuomina. Ką turite padaryti su atstumais AE ir AC, kad gautumėte kampo tangento reikšmę?

3 užuomina. Jeigu žinoma, kam lygi kampo tangento reikšmė, kaip pagal tai apskaičiuoti kampo dydį?

2 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite, kaip vadinami kampai, kurie susidaro, kai dvi lygiagrečios tiesės kerta kita tiesė.

2 užuomina. Pagalvokite: jeigu du kampai sutampa, ar sutampa ir jų tangento reikšmės?

3 užduotis

1 užuomina. Užrašykite reiškinį, kuriuo nusakoma, kokią dalį brėžinyje schematiškai pavaizduoto Žemės paviršiaus apskritimo ilgio sudaro arka AB. Brėžinyje pavaizduoto apskritimo ilgis apskaičiuojamas pagal formulę $2\pi R$. Kam lygus lanko AB ir šio ilgio santykis?

2 užuomina. Užrašykite reiškinį, kuriuo nusakoma, kokią dalį pilnojo kampo (360°) sudaro kampo AOB dydis laipsniais. Kaip užrašomas kampo AOB dydžio laipsniais ir pilnojo kampo (360°) santykis?

3 užuomina. Sulyginkite užrašytus reiškinius. Įsistatykite gautus dydžius. Atkreipkite dėmesį, kad liko vienintelis nežinomasis – Žemės spindulio ilgis R. Pertvarkykite gautą reiškinį taip, kad rastumėte R reikšmę. Nepamirškite suapvalinti iki sveikojo skaičiaus kilometrų.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	11	Skaičiai ir skaičiamai	Bendrasis	Sinusas, kosinusas ir tangentas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	3
2				Sinusas, kosinusas ir tangentas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
3				Sinusas, kosinusas ir tangentas	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	3

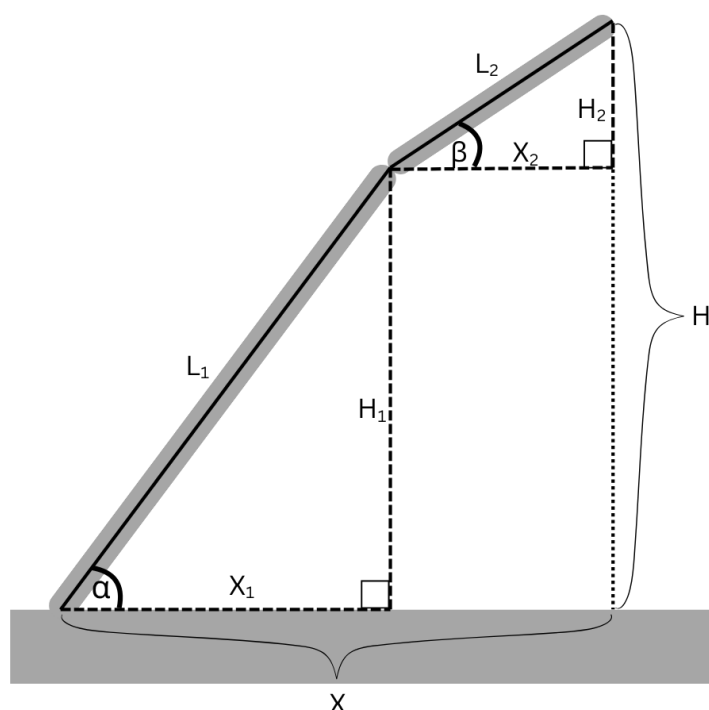
Robotinės rankos matematika

Bendroji įvestis

Modernios gamyklos, laboratorijos ir net ligoninės neapsieina be robotizuotų įrenginių – robotinių rankų. Jos atlieka itin preciziškus veiksmus: renka telefonus, pakuoja prekes, netgi atlieka sudėtingas chirurgines operacijas! Kyla klausimas: kaip jos žino, kur ir kaip judėti? Tam naudojamas matematinis modeliavimas – ypač svarbios trigonometrijos žinios: atkarpų ilgiai, kampai ir jų sąryšiai leidžia apskaičiuoti, kokiame taške atsidurs robotinės rankos galas (riešas).

Paveiksle matote dviejų sąnarių (dviejų matuojamų kampų) robotinės rankos modelį, kurį sudaro dvi standžios dalys, judančios vienoje plokštumoje.

Visos toliau pateiktos užduotys remiasi šiuo modeliu.



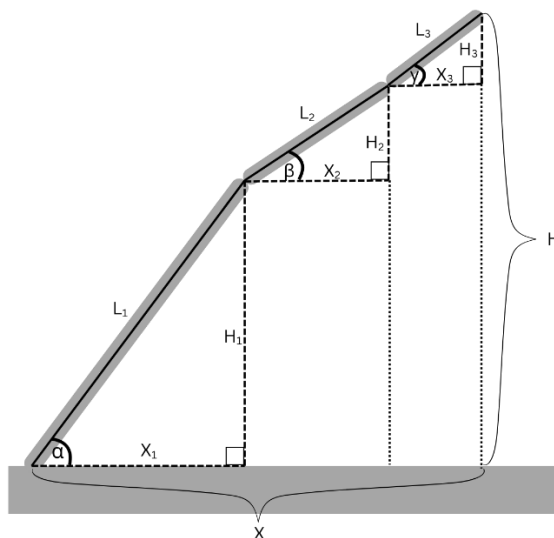
Užduotys

1 užduotis

Apskaičiuokite aukštį H . Kokiame aukštyje (centimetrais) nuo pagrindo atsiduria robotinės rankos galas, kai $L_1 = 30$ cm, $\alpha = 60^\circ$; $L_2 = 20$ cm, $\beta = 45^\circ$? Pateikite skaičiavimus. Atsakymą nurodykite centimetrais ir suapvalinkite iki sveikąjį skaičių.

2 užduotis

Sudarykite formulę, su kuria būtų galima apskaičiuoti bendrą rankos galo aukštį H , priklausantį nuo L_1 , L_2 ir kampų α , β . Kaip atrodytų formulė, jei būtų pridėtas dar trečias segmentas L_3 , kylantis kampu γ nuo horizontalės?



3 užduotis

Tarkime, kad robotinės rankos segmentų ilgiai yra $L_1 = 30$ cm, $L_2 = 20$ cm. Segmentų kampai α ir β tenkina sąlygą: $\alpha + \beta = 120^\circ$ ir įgyja reikšmes iš intervalo nuo 0° iki 90° su 5° žingsniu, t. y. gali įgyti tik reikšmes: $0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, \dots, 85^\circ, 90^\circ$.

Kokį didžiausią horizontalų atstumą X (nebūtinai horizontalioje rankos pagrindo plokštumoje) gali pasiekti rankos galas? Atsakymą pateikite centimetrais, suapvalinkite iki tūkstantųjų. Nurodykite pasirinktas kampų reikšmes ir pagrįskite savo pasirinkimą.

4 užduotis

Sakykime, kad robotinės rankos galas yra taške, kuris yra 24 cm aukštyje ir 18 cm atstumu nuo robotinės rankos pagrindo. Yra žinoma, kad tada du trikampiai, pavaizduoti brėžinyje, yra panašūs, bet kampas α **nėra lygus** kampui β . Taip pat žinoma, kad pirmasis rankos segmentas, kurio ilgis L_1 , yra **du kartus ilgesnis** už antrąjį. Apskaičiuokite kampus α ir β laipsniais ir suapvalinkite iki dešimtųjų. Segmentus L_1 ir L_2 pateikite centimetrais ir suapvalinkite iki tūkstantųjų.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Kad apskaičiuotume aukštį, iki kurio ranka pakilo, pritaikome sinuso apibrėžimą: $H = L_1 \cdot \sin(\alpha) + L_2 \cdot \sin(\beta)$ $H = 30 \cdot \sin(60^\circ) + 20 \cdot \sin(45^\circ)$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Apskaičiavę gauname: $H \approx 30 \cdot 0,866 + 20 \cdot 0,7071 \approx 25,98 + 14,14 = 40,12 \text{ cm}$ Ats.: $H = 40 \text{ cm}$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
<i>Jeį pateikiami skaičiavimai su tiksliomis trupmeninėmis reikšmėmis (pvz., $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$), skiriami 2 taškai, net jei galutinis atsakymas nesuapvalintas iki centimetrų.</i> <i>Galimi ir kiti skaičiavimo būdai. Pirmajam trikampiui taikyti taisyklę, kad kraštinė priešais 30° kampą lygi pusei įžambinės, ir pastebėti, kad antrasis trikampis lygiašonis.</i>		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Pritaikome sinuso apibrėžimą: $H_1 = L_1 \cdot \sin(\alpha)$; $H_2 = L_2 \cdot \sin(\beta)$; $H_3 = L_3 \cdot \sin(\gamma)$	1	<i>Už teisingai pritaikytą sinuso funkciją.</i>
Galutinė formulė. Be trečio segmento: $H = L_1 \cdot \sin(\alpha) + L_2 \cdot \sin(\beta)$ Su trečiu segmentu: $H = L_1 \cdot \sin(\alpha) + L_2 \cdot \sin(\beta) + L_3 \cdot \sin(\gamma)$	1	<i>Už gautas abi teisingas formules.</i>

3 užduoties vertinimas																										
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas																								
	3																									
Žinome, kad: $X = 30 \cdot \cos(\alpha) + 20 \cdot \cos(\beta)$. Kadangi $\alpha + \beta = 120^\circ$, galime išreikšti $\beta = 120^\circ - \alpha$. Tada: $X(\alpha) = 30 \cdot \cos(\alpha) + 20 \cdot \cos(120^\circ - \alpha)$.	1	Už teisingai išreikštą $X(\alpha)$ funkciją.																								
Tikriname su 5° žingsniu: <table border="1"> <thead> <tr> <th>α</th> <th>β</th> <th>X (cm)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>30°</td> <td>90°</td> <td>25,980</td> </tr> <tr> <td>35°</td> <td>85°</td> <td>26,320</td> </tr> <tr> <td>40°</td> <td>80°</td> <td>26,460</td> </tr> <tr> <td>45°</td> <td>75°</td> <td>26,390</td> </tr> <tr> <td>50°</td> <td>70°</td> <td>26,120</td> </tr> <tr> <td>55°</td> <td>65°</td> <td>25,370</td> </tr> <tr> <td>60°</td> <td>60°</td> <td>25,000</td> </tr> </tbody> </table>	α	β	X (cm)	30°	90°	25,980	35°	85°	26,320	40°	80°	26,460	45°	75°	26,390	50°	70°	26,120	55°	65°	25,370	60°	60°	25,000	1	Už teisingai patikrintas bent tris kampų poras.
α	β	X (cm)																								
30°	90°	25,980																								
35°	85°	26,320																								
40°	80°	26,460																								
45°	75°	26,390																								
50°	70°	26,120																								
55°	65°	25,370																								
60°	60°	25,000																								

65°	55°	23,970		
Ats.: didžiausias horizontalus atstumas pasiekiamas, kai $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 80^\circ$.			1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos				
Jei užduotis sprendžiama braižant $X(\alpha)$ funkcijos grafiką, taškai skiriami už reikšmių perrinkimą. $X(\alpha)$ funkcijos reikšmių tikslumas nėra vertinamas.				

4 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Trikampių panašumas grindžiamas proporcija: $\frac{X_1}{H_2} = \frac{H_1}{X_2} = \frac{L_1}{L_2} = 2$	1	Už sudarytą teisingą proporciją.
Sąryšiai iš proporcijos: $\frac{X_1}{H_2} = 2 \rightarrow X_1 = 2H_2$ $\frac{H_1}{X_2} = 2 \rightarrow H_1 = 2X_2$ Taip pat žinoma: $X_1 + X_2 = 18$ $H_1 + H_2 = 24$ Išstatome iš pirmųjų lygčių: $2H_2 + X_2 = 18$ $2X_2 + H_2 = 24$ Išsprendžiame ir gauname: $H_2 = 4; X_2 = 10$ $X_1 = 2H_2 = 8; H_1 = 2X_2 = 20$	1	Už teisingai išspręstas lygčių sistemas.
Skaiciuojame segmentų ilgius. Iš Pitagoro teoremos: $L_2 = \sqrt{X_2^2 + H_2^2} = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116}$ $\approx 10,770$ $L_1 = 2L_2 = 2\sqrt{116} = \sqrt{464} \approx 21,540$	1	Už teisingai apskaičiuotus segmentų ilgius.
Skaiciuojame kampų didumą. Kadangi turime stačius trikampius su visomis žinomomis kraštinėmis, pasinaudojame sinuso, kosinuso ar tangento apibrėžimu ir apskaičiuojame kampus. Pvz.: $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{H_1}{X_1} = \frac{20}{8} = 2,5 \rightarrow$ $\alpha = \operatorname{arctg}(2,5) \approx 68,2^\circ$ $\beta = 180^\circ - \alpha \approx 21,8^\circ$	1	Už teisingai apskaičiuotus kampus.
Pastabos		
Galimi ir kiti uždavinio sprendimo būdai. Pvz., trigonometrinis, susiejant kampus, arba grafinis. Tokiu atveju pirmi 2 taškai skiriami už pasirinktą teisingą sprendimo strategiją ir teisingus skaičiavimus (samprotavimus).		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Ar bendrą robotinės rankos aukštį galima suskaidyti į kiekvieno segmento vertikaliąją sudedamąją dalį?

2 užuomina. Kaip pritaikytumėte sinuso funkciją, kad apskaičiuotumėte kiekvieno segmento „aukščio įnašą“?

3 užuomina. Prisiminkite stačiajame trikampyje galiojančią sinuso savybę: $\sin \alpha = \frac{h}{d}$, čia h – aukštinės ilgis, d – įžambinės ilgis.

2 užduotis

1 užuomina. Kaip apskaičiuoti segmento, kuris sudaro kampą θ su horizontale, vertikaliąją dalį? Pritaikykite sinuso funkcijos apibrėžimą.

2 užuomina. Jei robotinę ranką sudarytų tik vienas segmentas – kokia būtų aukščio formulė?

3 užuomina. Jei yra keli segmentai, ar galime tiesiog sudėti jų vertikaliąsias dalis?

3 užduotis

1 užuomina. Kaip išreikšti β per α , kai jų suma lygi 120° ?

2 užuomina. Kaip galima parašyti formulę $X(\alpha)$, kai X priklauso nuo $\cos(\alpha)$ ir $\cos(\beta)$?

3 užuomina. Kaip rasti, kuri α reikšmė duoda didžiausią X ? Prisiminkite, kaip atrodo tokios funkcijos grafikas. Ar galima perrinkti kelias α reikšmes kas 5° ?

4 užduotis

1 užuomina. Ką reiškia, kad trikampiai panašūs, bet kampai $\alpha \neq \beta$? Galbūt vienas trikampis pasuktas vienas kito atžvilgiu?

2 užuomina. Pritaikykite panašiųjų trikampių savybę visoms trikampių kraštinėms. Kokias dvi pagrindines lygtis galima iš to gauti?

3 užuomina. Esami trikampiai ne tik panašūs, bet ir statieji, todėl jiems galioja stačiųjų trikampių savybės. Remkitės jomis ir apskaičiuokite kampų ir segmentų ilgius.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	11	Skaičiai ir skaičiavimai	Bendrasis	Sinusas, kosinusas ir tangentas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Sinusas, kosinusas ir tangentas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	2
3				Sinusas, kosinusas ir tangentas	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	3
4				Sinusas, kosinusas ir tangentas	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	4

Slaptažodžių apsauga

Bendroji įvestis

Tyrimais nustatyta, kad daugelis interneto vartotojų, prašomi sugalvoti slaptažodį, renkasi trumpus, lengvai įsimenamus ir nepakankamai saugius derinius. Vieni dažniausiai naudojamų slaptažodžių yra „123456“, „password“ arba „qwerty“, t. y. tokie, kuriuos galima atspėti per kelias milisekundes. Kibernetiniai nusikaltėliai, norėdami per trumpą laiką išbandyti didelį kiekį galimų slaptažodžių, taiko įvairius metodus.

Ar slaptažodis stiprus, lemia ne tik jo ilgis, bet ir naudojamų simbolių įvairovė. Kuo slaptažodis ilgesnis ir sudarytas iš įvairesnių simbolių, tuo sunkiau jį atspėti taikant nuoseklią paiešką (angl. *brute force attack*), kai išbandomos visos galimos kombinacijos.

Vienas iš būdų įvertinti slaptažodžio atsparumą ir nenusipėjamumą yra **slaptažodžio entropija**. Ji matuojama **bitais** ir nusako, kiek informacijos yra slaptažodyje. Kuo didesnė entropija, tuo slaptažodis saugesnis.

Slaptažodžio entropija apskaičiuojama pagal formulę:

$$H = L \cdot \log_2 N$$

Čia:

- H – slaptažodžio entropija (bitais),
- L – slaptažodžio ilgis (simboliais),
- N – galimų simbolių skaičius kiekvienoje slaptažodžio pozicijoje (kiekvienoje pozicijoje renkamasi iš tos pačios simbolių aibės, simboliai gali kartotis).

Slaptažodžio entropijos dydžiai:

- Mažiau nei 40 bitų – silpnas slaptažodis, jį galima greitai atspėti.
- 40–80 bitų – vidutinio stiprumo slaptažodis, gali atlaikyti daugelį atakų.
- Daugiau nei 80 bitų – labai saugus slaptažodis, praktiškai neįmanoma atspėti naudojant šiuolaikinius kompiuterius.

Užduotys

1 užduotis

Girmantė sukuria 7 simbolių ilgio slaptažodį, naudodama tik mažąsias raides (iš viso galimi 26 simboliai). Jei mergina pridėtų ir didžiąsias raides (iš viso galimi 52 simboliai), kiek bitų padidėtų slaptažodžio entropija?

2 užduotis

Pagal dabartinius saugumo standartus reikalaujama, kad saugaus slaptažodžio entropija būtų 80 bitų. Tačiau prognozuojama, kad per ateinančius 50 metų kompiuterių skaičiavimo galia dvigubės kas 2 metus. Vadinasi, minimali labai saugaus slaptažodžio entropija (šiuo metu 80 bitų) kas 2 metus padidės po 1 bitą.

Kiek mažiausiai simbolių turėtų sudaryti slaptažodį, naudojant visą simbolių aibę (95 simbolius), kad jis būtų saugus dar 50 metų? Atsakymas turi būti sveikasis skaičius.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Pasižymime H_1 – slaptažodžio entropiją, gaunamą kuriant slaptažodį tik iš mažųjų raidžių. Tuomet: $H_1 = 7\log_2(26)$.	1	Už teisingai apskaičiuotą entropiją, gaunamą naudojant tik mažąsias raides.
Pasižymime H_2 – slaptažodžio entropiją, gaunamą kuriant slaptažodį ir iš mažųjų, ir iš didžiųjų raidžių. Tuomet: $H_2 = 7\log_2(52)$.	1	Už teisingai apskaičiuotą entropiją, gaunamą naudojant mažąsias ir didžiąsias raides.
Apskaičiuojame entropijų skirtumą ir gauname: $H_2 - H_1 = 7\log_2(52) - 7\log_2(26) =$ $= 7\log_2\left(\frac{52}{26}\right) = 7\log_2(2) = 7.$ Ats.: entropija padidės 7 bitais.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Jei kas 2 metus saugiam slaptažodžiui reikalinga entropija padidėja 1 bitu, tuomet po 50 metų entropija bus lygi: $80 + \frac{50}{2} = 105$.	1	Už teisingai apskaičiuotą saugaus slaptažodžio entropiją po 50 metų.
Kadangi naudojama 95 simbolių aibė, gauname lygtį: $105 = L \cdot \log_2(95)$.	1	Už sudarytą teisingą lygtį simbolių kiekiui rasti.
Tuomet $L = \frac{105}{\log_2(95)} \approx 15,98$. Ats.: slaptažodį turėtų sudaryti bent 16 simbolių.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite, kam lygi entropija naudojant tik mažąsias raides. Taip pat užrašykite, kam lygi entropija, naudojant ir mažąsias, ir didžiąsias raides. Pagal tai apskaičiuokite, kiek padidėtų entropija, naudojant ne tik mažąsias, bet ir didžiąsias raides.

2 užuomina. Pasinaudokite formule $H = L \cdot \log_2 N$ ir užrašykite, kam lygi entropija H_1 , kai naudojamos tik mažosios raidės, t. y. $L = 7$ ir $N = 26$. Taip pat užrašykite, kam lygi entropija H_2 , kai naudojamos ir mažosios, ir didžiosios raidės, t. y. $L = 7$ ir $N = 52$. Pritaikykite logaritmų savybes ir apskaičiuokite $H_2 - H_1$ reikšmę.

2 užduotis

1 užuomina. Jei kas 2 metus saugiam slaptažodžiui reikalinga entropija padidėja 1 bitu, kiek entropija padidės per 50 metų? Apskaičiuokite, kam bus lygi saugaus slaptažodžio entropija po 50 metų, jei šiuo metu ji yra 80 bitų.

2 užuomina. Į lygtį $H = L \cdot \log_2 N$ įsistatykite apskaičiuotą entropiją H ir sąlygoje pateiktą N reikšmę. Pasinaudokite skaičiuotuvu ir apskaičiuokite L reikšmę. Nepamirškite atsakymo pateikti sveikuoju skaičiumi.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis		Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	11	Skaičiai ir skaičiavimai	Bendrasis	Logaritmai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	3
2				Logaritmai	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	3

Programavimo įdomybės

Bendroji įvestis

Dirbant su realiaisiais skaičiais programavimo kalbose, labai svarbus skaičiavimo tikslumas. Apvalinimo paklaidos ar skaitmeninis triukšmas lemia, kad loginė operacija $x == y$ (reiškianti, kad x lygus y) ne visada pateikia loginį teiginį `true` (t. y. „tiesa“), net jei matematiškai x ir y turėtų būti lygūs. Todėl programuotojai ir programuotojos tikrina ne tikslią lygybę, bet ar skaičiai yra pakankamai artimi: jie pasitelkia sąlygą $|x - y| < \epsilon$, kur ϵ – tam tikru būdu pasirinktas labai mažas teigiamas skaičius. Tokia sąlyga reiškia, kad atstumas tarp skaičių yra mažesnis nei toleruojama paklaida.

Toliau pateiktos užduotys padės suprasti, kodėl ši idėja reikalinga, kaip ji pagrindžiama matematiškai, ir kur ją galima taikyti.

Užduotys

1 užduotis

Programuojant kodą naudojama sąlyga: jei $|x - 3| < 0,0001$, tai skaičius laikomas lygiu 3. Patikrinkite, kurie iš šių skaičių, remiantis pateikta sąlyga, bus laikomi „lygiaverčiais 3“:

- a) $x = 3,00009$
- b) $x = 2,99991$
- c) $x = 3,0002$
- d) $x = 2,99989$
- e) $x = 3$

2 užduotis

Skaičiuojant $x = \sqrt{2}$, gauta apytikslė reikšmė $x \approx 1,4142135$.

Kokia turi būti didžiausia leistina ϵ reikšmė, kad ši reikšmė būtų laikoma pakankamai artima tikrajai kvadratinės šaknies reikšmei ir tenkintų sąlygą $|x^2 - 2| < \epsilon$? Užrašykite nelygybę, kurią turi tenkinti ϵ . Skaičiuokite ir atsakymą pateikite septynių skaitmenų po kablelio tikslumu.

3 užduotis

Į programavimo aplinką vartotojai įveda skaitines reikšmes, kurios vėliau naudojamos skaičiavimams. Tarkime, vartotojas įveda reikšmę $x = 2,000001$, kuri bus naudojama funkcijoje. Ar

galima naudoti šią reikšmę, jei leidžiamos tik tokios, kurios nėra per arti 2, t. y. tenkina sąlygą $|x - 2| > 0,000001$? Atsakymą pagrįskite.

4 užduotis

Programa priima įvestą x reikšmę ir pateikia skaičiavimus tik tada, kai tenkinamos visos šios trys sąlygos:

$$|x - 5| < 0,05;$$

$$|x^2 - 25| < 0,5;$$

$$|x - 4,95| > 0,01.$$

a) Nustatykite, ar šis įvesties filtras yra griežtesnis nei vien tik sąlyga $|x - 5| < 0,05$.

b) Raskite apytikslį intervalą (pateikite keturis skaitmenis po kablelio), kuriame esantis x būtų priimtas pagal visas tris sąlygas.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	1	
Tinka: a, b, e. Netinka: c, d. Ats.: a, b, e.	1	Už teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Skaičiuojame: $x = 1,4142135 \Rightarrow x^2 = 1,4142135^2 \approx 1,99999998$ $ x^2 - 2 \approx 1,99999998 - 2 = 0,0000002$ Ats.: užtenka, kad $\varepsilon > 0,0000002$.	1	Už teisingą apskaičiavimą.
	1	Už teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Skaičiuojame: $ x - 2 = 2,000001 - 2 = 0,000001$ Tačiau pagal sąlygą reikalaujama, kad: $ x - 2 > 0,000001$ Ats.: sąlyga nėra tenkinama , nes gauta lygybė ir skaičius nepapuoia į griežtos nelygybės ribas (griežtai daugiau).	1	Už teisingą apskaičiavimą.
	1	Už padarytą teisingą išvadą.

4 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Taip, trijų sąlygų filtrs yra griežtesnis. Pagal sąlygą $ x - 5 < 0,05$ apibrėžiamas intervalas (4,95; 5,05), tačiau papildomos sąlygos ši intervalą apkarpo : $ x^2 - 25 < 0,5$ reiškia, kad: $x^2 \in (24,5; 25,5) \Rightarrow x \in (24,5; 25,5) \approx (4,9497; 5,0498)$ $ x - 4,95 > 0,01 \Rightarrow x \in (-\infty; 4,94) \cup (4,96; +\infty)$ Ats.: bendras intervalas, gaunamas išsprendus nelygybių sistemą, apytiksliai yra: $x \in (4,9600; 5,0498)$.	1	Už teisingą intervalų apskaičiavimą.
	1	Už padarytą teisingą išvadą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Pagalvokite, ką sužinote iš reiškinių $|x - 3| < 0,0001$. Koks intervalas apibrėžiamas?

2 užuomina. Patikrinkite, ar kiekvienas pateiktas skaičius patenka į intervalą $(2,9999; 3,0001)$.

3 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad „mažiau“ nereiškia „mažiau arba lygu“.

2 užduotis

1 užuomina. Pakelkite pateiktą x reikšmę kvadratu – tai $(\sqrt{2})^2$.

2 užuomina. Palyginkite gautą rezultatą su 2 – kiek trūksta iki 2?

3 užuomina. Kad skaičius būtų laikomas pakankamai artimu, gauta absoliutinė reikšmė turi būti mažesnė už ε .

3 užduotis

1 užuomina. Išsiaiškinkite, kiek skiriasi įvestas skaičius nuo 2.

2 užuomina. Pagal sąlygą reikalaujama, kad $|x - 2|$ būtų griežtai didesnis už 0,000001.

3 užuomina. Jei rezultatas lygus 0,000001, ar sąlyga tenkinama?

4 užduotis

1 užuomina. Išskleiskite kiekvieną sąlygą atskirai – į kokius intervalus patenka x ?

2 užuomina. Sąlyga $|x - 5| < 0,05$ reiškia, kad x priklauso intervalui $(4,95; 5,05)$.

3 užuomina. Sąlyga $|x - 4,95| > 0,01$ reiškia, kad x negali būti per arti 4,95.

4 užuomina. Raskite visų trijų intervalų bendrą sankirtą – tai galutinė priimtinių x reikšmių sritis.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	11	Skaičiai ir skaičiamai	Bendras	Realiojo skaičiaus modulis.	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Slenkstinis	1
2				Realiojo skaičiaus modulis.	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	2
3				Realiojo skaičiaus modulis.	Loginis mąstymas ir įrodymai	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Pagrindinis	2
4				Realiojo skaičiaus modulis.	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	2

III GIMANZIJOS KLASĖ, BENDRASIS KURSAS, MODELIAI IR SĄRYŠIAI

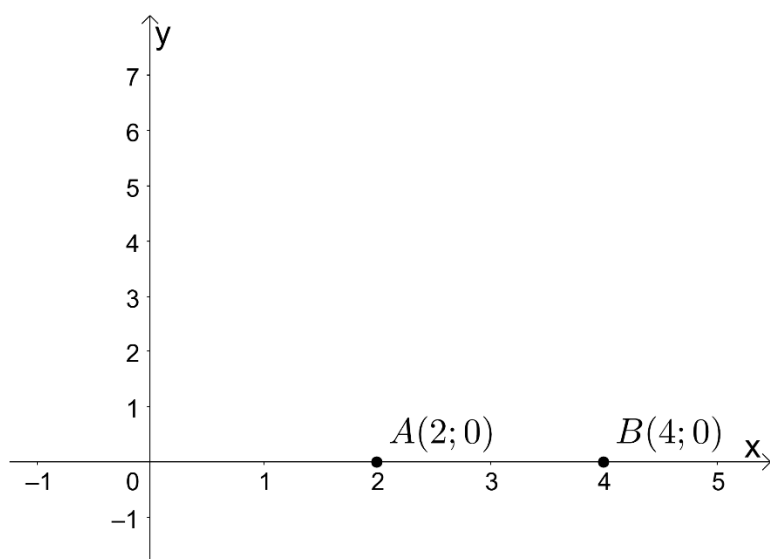
Kvadratinių funkcijų grafikai

Bendroji įvestis

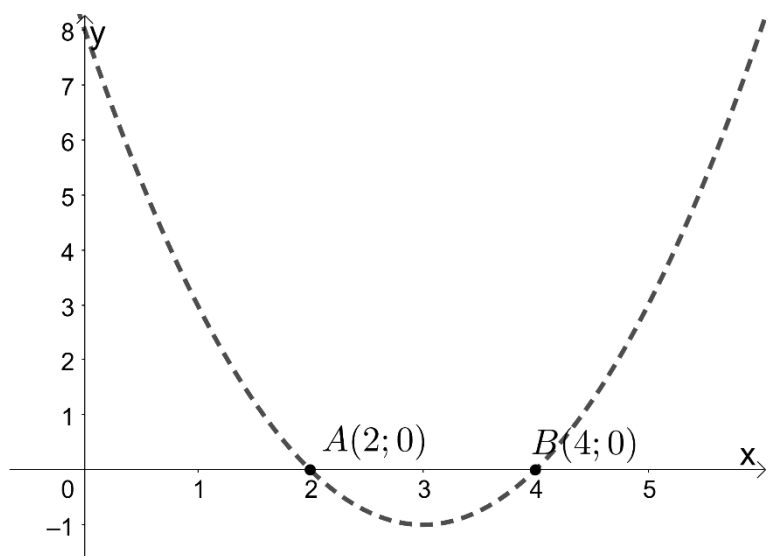
Jeigu koordinačių plokštumoje yra žinomi keli taškai, galima rasti daugianariu išreiškiamą funkciją, kurios grafikas eina per visus duotus taškus. Šis metodas plačiai taikomas prognozuojant įvairius gamtos ir ekonominius reiškinius.

Turint du žinomus taškus, per juos galima nubrėžti tiesės, parabolės, kubinės ir daugybės kitų funkcijų grafikus. Šioje užduotyje susipažinsite su funkcijomis, išreiškiamomis kvadratiniais daugianariais – mokysitės užrašyti kvadratinės funkcijas, kurių grafikai eina per užduotyse pateiktus taškus.

Pavyzdžiui, yra žinomi du taškai $A(2; 0)$ ir $B(4; 0)$.



Viena iš funkcijų, kurios grafikas eina per juos, yra parabolė $f(x) = (x - 2)(x - 4)$.



Tačiau tai tik viena iš kvadratinių funkcijų, tenkinančių šią sąlygą. Yra be galo daug skirtingų kvadratiniais daugianariais išreiškiamų funkcijų, kurių grafikai eina per tuos pačius du taškus.

Užduotys

1 užduotis

Žinoma, kad funkcija $f(x)$ yra išreiškiama kvadratinio daugianariu ir jos reikšmė lygi nuliui tik dviejuose taškuose, kai $x = 1$ ir $x = 2$.

Sugalvokite du skirtingus tokios funkcijos pavyzdžius.

2 užduotis

Funkcijai $f(x)$, išreiškiamai kvadratinio daugianariu, galioja šios trys lygybės:

$$f(3) = 0, \quad f(4) = 0, \quad f(5) = 100.$$

Raskite šią funkciją.

3 užduotis

Funkcijos $f(x)$, išreiškiamos kvadratinio daugianariu, reikšmė lygi nuliui tik dviejuose taškuose, kai $x = 6$ ir $x = 7$. Įrodykite, kad $f(8)$ reikšmė gali būti bet kuris skaičius, išskyrus nulį.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Pvz.: $f_1(x) = (x - 1)(x - 2)$ ir $f_2(x) = 2(x - 1)(x - 2)$. Tinka bet kuri funkcijų pora: $f_1(x) = a_1(x - 1)(x - 2)$ ir $f_2(x) = a_2(x - 1)(x - 2)$, kai $a_1 \neq a_2 \neq 0$.	2	Po 1 tašką už kiekvieną teisingai nurodytą funkciją.
Pastabos		
Funkcijos gali būti užrašytos ir kitokiu pavidalu, pvz., $f(x) = a(x^2 - 3x + 2)$. 2 taškai skiriami tada, kai funkcijos yra su skirtingomis konstantomis a .		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Pagal kvadratinio trinario skaidymo dauginamaisiais formulę, ieškomą funkciją galima išreikšti daugianariu $a(x - 3)(x - 4)$, kur $a \neq 0$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Įsistatykime $x = 5$ ir gausime: $f(5) = 100 = a(5 - 3)(5 - 4)$ arba $a = 50$.	1	Už teisingai sudarytą lygybę. Vienu būdu funkcijos daugianaris padauginamas iš ieškomos konstantos a , kitu būdu – apskaičiuojama $(x - 3)(x - 4)$ reikšmė taške $x = 5$.
Ats.: $f(x) = 50(x - 3)(x - 4)$.	1	Už teisingą atsakymą.
Pastabos		
Užduotį galima teisingai atlikti ir kitaip, pvz., pritaikyti kvadratinės funkcijos pavidalą $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tokiu atveju po 1 tašką skiriama už teisingai apskaičiuotus koeficientus a , b ir c .		

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Pagal kvadratinio trinario skaidymo dauginamaisiais formulę, ieškomą funkciją galima išreikšti pavidalu $f(x) = a(x - 6)(x - 7)$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Įsistatykime reikšmę $x = 8$ ir gausime: $f(8) = 2a$.	1	Už teisingai išreikštą $f(8)$.
Išvada: atsižvelgiant į a reikšmę, $f(8)$ gali įgyti bet kurią reikšmę, išskyrus nulį.	1	Už teisingai suformuluotą išvadą. Taškas skiriamas tik tuo atveju, jeigu išvadoje nurodoma, kad nulis yra negalima reikšmė (arba nurodoma, kad $a \neq 0$).

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite kvadratinių funkcijų temą. Kaip užrašomas kvadratinis daugianaris, jeigu žinomos jo šaknys?

2 užuomina. Prisiminkite kvadratinės funkcijos pavidalą $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Sąlygoje pateikti x_1 ir x_2 , todėl galite juos įsistatyti į šį pavidalą. Tada liks sugalvoti dvi skirtingas a reikšmes.

2 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite kvadratinės funkcijos pavidalą $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Kurie iš sąlygoje paminėtų dydžių atitinka x_1 ir x_2 ?

2 užuomina. Kokią konstantos a reikšmę reikia parinkti, kad įsistačius $x = 5$ atsakymas būtų $f(5) = 100$?

3 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite kvadratinės funkcijos pavidalą $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Kurie iš sąlygoje paminėtų dydžių atitinka x_1 ir x_2 ?

2 užuomina. Išreikškite, kam lygi funkcija $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, kai įsistatote x_1 ir x_2 , taip pat $x = 8$. Kam gali būti lygus gautas reiškinys, atsižvelgiant į a reikšmę?

3 užuomina. Žodžiais suformuluokite išvadą, kam gali būti lygi $f(8)$ reikšmė. Be to, atkreipkite dėmesį, kas sąlygoje paminėta apie nulinę reikšmę.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	11	Modeliai ir sąryšiai	Bendrasis	Funkcijos	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	2
2				Lygtys	Matematinis komunikavimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3
3				Lygtys	Loginis mąstymas ir įrodymai	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	3

Logaritminė pH skalė

Bendroji įvestis

Kai kurie gamtoje vykstantys procesai gali būti aprašomi neįprastu būdu – logaritmine skale. Pavyzdžiui, tirpalų rūgštingumas matuojamas logaritmine pH skale.

Realiaame pasaulyje dažnai susiduriama su itin mažomis rūgštingumo koncentracijomis – jos būna labai arti nulio. Gaunama pH reikšmė kartais naudojama atspindėti, kiek nulių yra H^+ jonų koncentracijoje prieš pirmąjį nenulinį skaitmenį.

Pavyzdžiui, lentelėje pateikiamos pH reikšmės ir jas atitinkančios H^+ jonų koncentracijos.

	pH	H^+ jonų koncentracija (Mol/L)
Rūgštis	0	1
	1	0,1
	2	0,01
	3	0,001
	4	0,0001
	5	0,00001
	6	0,000001
Neutralu	7	0,0000001
Šarmas	8	0,00000001
	9	0,000000001
	10	0,0000000001
	11	0,00000000001
	12	0,000000000001
	13	0,0000000000001
	14	0,00000000000001

Užduotys

1 užduotis

Remkitės lentelėje pateiktais duomenimis ir atsakykite:

- Jei tirpale esančių H^+ jonų koncentraciją padidintume 10 kartų, keliais vienetais pasikeistų pH?
- Jei tirpale esančių H^+ jonų koncentraciją sumažintume 100 kartų, keliais vienetais pasikeistų pH?

2 užduotis

Norint apskaičiuoti tikslią pH reikšmę, tą padaryti gali būti sunku. Šioje užduotyje supaprastintai laikykime, kad pH reikšmė gali būti apskaičiuojama tokia formule:

$$pH = -\log_{10}[H].$$

Čia H^+ jonų koncentracija žymima $[H]$.

Jeigu pH reikšmės priklauso intervalui $[0,5; 1,5]$, tuomet kokiam intervalui priklauso jas atitinkančios $[H]$ reikšmės? Pasinaudokite formule ir pateikite atsakymą dviejų skaitmenų po kablelio tikslumu.

3 užduotis

Ant stalo stovi indas su skysčiu, kurio pH lygus A . Žinoma, kad A yra sveikasis skaičius iš intervalo $[0, 14]$.

Tarkime, kad šio skysčio H^+ jonų koncentraciją sumažiname pusiau.

Įrodykite: jeigu apskaičiuosime naujo tirpalo pH ir suapvalinsime iki sveikojo skaičiaus, gausime A .

Įrodymui naudokite supaprastintą pH apskaičiavimo formulę $pH = -\log_{10}[H]$.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Iš lentelėje pateiktų duomenų matome, kad koncentraciją padidinus 10 kartų (atitinka pakilimą viena lentelės eilute aukšty, pH sumažėja vienetu.	1	Už teisingą atsakymą.
Iš lentelėje pateiktų duomenų matome, kad koncentraciją sumažinus 100 kartų (atitinka nusileidimą dviem lentelės eilutėmis žemyn), pH padidėja dvejetu.	1	Už teisingą atsakymą.
Pastabos		
Atsakymą išreikšti galima ir kitaip, pvz.: -1 ir $+2$.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
$0,5 = -\log_{10} A$ ir $1,5 = -\log_{10} B$ (čia A ir B – ieškomos koncentracijos).	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą bent vienam iš duotų pH pritaikyti pH funkcijos apibrėžimą.
$A = 10^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0,32$.	1	Už gautą teisingą atsakymą ($pH = 0,5$ atitinkančią koncentraciją).
$B = 10^{-1,5} = \frac{1}{10\sqrt{10}} \approx 0,03$.	1	Už gautą teisingą atsakymą ($pH = 1,5$ atitinkančią koncentraciją).
Ats.: $[H] \in [0,03; 0,32]$.	1	Už nurodytą teisingą intervalą.
Pastabos		
Jei atsakyme bent vienas intervalo kraštas atviras, ketvirtasis taškas nėra skiriamas.		

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Naujo tirpalo pH: $-\log_{10} \frac{[H]}{2}$.	1	Už teisingai užrašytą naujo tirpalo pH.
$-\log_{10} \frac{[H]}{2} = -\log_{10}[H] + \log_{10} \frac{1}{2}$.	1	Už teisingai pritaikytą logaritmų sumos taisyklę naujo tirpalo pH išraiškai.
$\log_{10} \frac{1}{2} \approx -0,301$.	1	Už apytiksliai apskaičiuotą $\log_{10} \frac{1}{2}$ reikšmę.
Kadangi pH reikšmė sumažėja apytiksliai 0,3, o A yra sveikasis skaičius, suapvaliname A – 0,3 ir vėl gauname A.	1	Už gautą teisingą išvadą apie pH pokytį ir naujo pH suapvalinimą iki A.
Pastabos		
Užuot apytiksliai apskaičiavus $\log_{10} \frac{1}{2}$, galima ir įvertinti $\log_{10} 2$ reikšmę arba nurodyti, kad $\log_{10} \frac{1}{2}$ reikšmė yra iš intervalo $(-0,5; 0)$ arba siauresnio.		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad lentelėje gretimos eilutės atitinka koncentracijos pokytį 10 kartų.

2 užuomina. Nustatykite, kurią kryptimi lentelėje pateiktos koncentracijos didėja – kylant į viršų ar leidžiantis žemyn?

3 užuomina. Jei koncentracijos pokytis 10 kartų atitinka poslinkį viena eilute, tuomet koncentracijos pokytis 100 kartų atitinka poslinkį dviem eilutėmis. Pagal tai nustatykite, į kurią pusę ir keliais vienetais pasikeičia pH reikšmė.

2 užduotis

1 užuomina. Pasinaudokite pH funkcija $pH = -\log_{10}[H]$ ir užrašykite dvi lygtis, atitinkančias $pH = 0,5$ ir $pH = 1,5$.

2 užuomina. Išspręskite abi lygtis. Pasinaudokite savybe $10^{\log_{10} A} = A$.

3 užuomina. Lygčių sprendiniai yra $[H]$ intervalo rėžiai. Atkreipkite dėmesį, ar intervalas atviras, ar uždaras. Taip pat į tai, kad intervalo reikšmės turi didėti.

3 užduotis

1 užuomina. Pasinaudokite pH funkcija $pH = -\log_{10}[H]$ ir užrašykite, kam lygus naujo tirpalo pH, jeigu senojo tirpalo H^+ koncentraciją žymite $[H]$.

2 užuomina. Pritaikykite logaritmų sumos taisyklę ir atskirkite logaritmo viduje prie $[H]$ esantį daugiklį kaip atskirą narį.

3 užuomina. Apskaičiuokite šio atskirto nario dydį. Jis atitinka tai, kiek pasikeis tirpalo pH, sumažinus koncentraciją pusiau.

4 užuomina. Kokią išvadą galite padaryti apie tai, kam bus lygi naujo tirpalo pH reikšmė, jeigu ją suapvalinsite iki sveikojo skaičiaus? Nepamirškite, kad A gali būti tik sveikieji skaičiai.

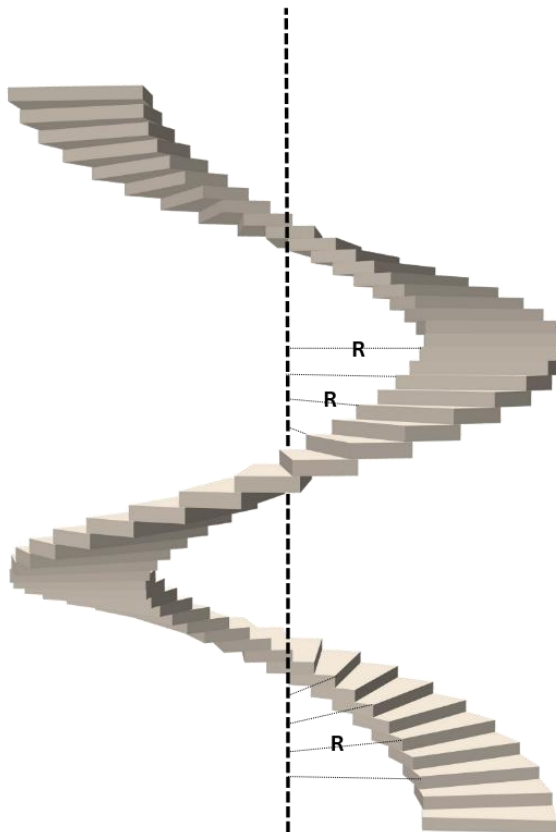
Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	11	Modeliai ir sąryšiai	Bendrasis	Funkcijos: rodiklinė ir logaritminė funkcijos	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Funkcijos: rodiklinė ir logaritminė funkcijos	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	4
3				Funkcijos: rodiklinė ir logaritminė funkcijos	Loginis mąstymas ir įrodymai	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	4

Laiptų spiralė

Bendroji įvestis

Architektas projektuoja laiptus, kurie spiralės forma kyla aukštyn. Kiekvieno laiptelio aukštis yra vienodas.



Raide h žymėsime vieno laiptelio aukštį. Raide R žymėsime atstumą nuo spiralės centrinės ašies (brėžinyje pažymėta punktyrine linija) iki artimiausio laiptelio pradžios.

Kad spiralės formos laiptai būtų tinkamai įkomponuoti į numatytą erdvę, jų matmenys turi atitikti šią lygybę:

$$R = \sqrt{128 + h^2}.$$

Čia h ir R matuojami centimetrais.

Užduotys

1 užduotis

Tegul $h = 31$ cm, o $R = 33$ cm. Parodykite, kad šiems dydžiams galioja sąlygoje pateikta lygybė.

2 užduotis

Laiptai turi būti tokio dydžio, kad galiotų $R = 18$ cm. Apskaičiuokite, kam tuomet bus lygus vieno laiptelio aukštis h .

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Įsistatome R, h ir gauname: $33 = \sqrt{128 + 31^2}$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (į lygtį įsistatyti h ir R).
Abi lygybės pusės lygios, nes: $\sqrt{128 + 31^2} = \sqrt{1089} = 33$	1	Už teisingą iracionaliojo reiškinio pavertimą racionaliuoju (ištraukiant šaknį iš pilnojo kvadrato arba keliant abi puses kvadratu ir sudedant).

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Įstatome sąlygoje duotą R ir gauname lygtį: $18 = \sqrt{128 + h^2}$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (į lygtį įsistatyti R).
Pakeliame kvadratu ir gauname: $324 = 128 + h^2$	1	Už teisingą iracionaliosios lygties pertvarkymą į racionaliąją.
Iš lygties randame h: $h = \pm\sqrt{196} = \pm 14$	1	Už teisingai apskaičiuotą racionaliosios lygties sprendinį.
Ats.: $h = 14 \text{ cm}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Įsistatykite duotas h ir R reikšmes į sąlygoje pateiktą lygtį $R = \sqrt{128 + h^2}$.

2 užuomina. Suprastinkite gautą reiškinį. Patikrinkite – ar galioja lygybė?

2 užduotis

1 užuomina. Įsistatykite duotą R reikšmę į sąlygoje pateiktą lygtį $R = \sqrt{128 + h^2}$. Kokius veiksmus reikia atlikti su gautu reiškiniu, kad išreikštumėte h ? Iš pradžių apskaičiuokite h^2 , tada pagal tai raskite h reikšmes.

2 užuomina. Kai apskaičiuosite lygties sprendinius h , nepamirškite patikrinti, ar visi sprendiniai tinka pagal užduoties sąlygą.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	11	Modeliai ir sąryšiai	Bendrasis kursas	Lygtys	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Lygtys	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	4

Progresinis atlyginimas

Bendroji įvestis

Kai kuriose darbovietėse taikoma progresinio (augančio) atlyginimo sistema – kuo daugiau laiko darbuotojas pradirba įmonėje, tuo didesnis priedas jam mokamas prie atlyginimo. Tokia atlyginimo sistema gali paskatinti darbuotojų lojalumą ir padėti įmonėms išsaugoti kvalifikuotus specialistus.

Pradinis atlyginimas įmonėje yra A eurų per mėnesį, o priedas prie atlyginimo už kiekvienus pilnus darbo metus – po B eurų per mėnesį.

Pavyzdžiui, jei pradinis atlyginimas $A = 1000$, o $B = 100$, tuomet pirmaisiais metais atlyginimas bus 1000 eurų per mėnesį, antraisiais metais 1100 eurų per mėnesį, trečiaisiais metais 1200 eurų per mėnesį ir t. t.

Užduotys

1 užduotis

Marius įsidarbino įmonėje, kurioje pradinis atlyginimas $A = 1500$ eurų per mėnesį, o už kiekvienus pilnus darbo metus užmokestis pakeliamas po $B = 120$ eurų per mėnesį.

Apskaičiuokite, kiek Marius uždirbs per savo antruosius darbo metus.

2 užduotis

Pradinis atlyginimas įmonėje yra 1000 eurų per mėnesį. Apskaičiuokite, koks turėtų būti atlyginimo pakėlimas B , kad per 40 metų būtų uždirbtas bent 1 milijonas eurų. Atsakymą pateikite eurai ir suapvalinkite iki sveikojo skaičiaus.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Antraisiais metais atlyginimo dydis eurai per mėnesį: $1500 + 120 = 1620$.	1	Už teisingai apskaičiuotą mėnesinį atlyginimą dirbant antrus metus.
Per antruosius metus bus uždirbta eurų: $12 \cdot 1620 = 19440$.	1	Už teisingai apskaičiuotą visą per antruosius metus uždirbtą sumą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
Visai per 40 metų uždirbtai sumai apskaičiuoti taikykime aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę su $n = 40$: $S_{40} = \frac{a_1 + a_{40}}{2} \cdot 40 \cdot 12$ arba $S_{40} = \frac{2 \cdot a_1 + (40-1) \cdot B}{2} \cdot 40 \cdot 12.$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą taikyti aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę su $n = 40$.
Kadangi turi būti uždirbtas milijonas, gauname: $\frac{a_1 + a_{40}}{2} \cdot 40 \cdot 12 \geq 1000000$	1	Už gautą teisingą nelygybę.
Įsistatome reikšmes ir gauname: $\frac{2000 + 39 \cdot B}{2} \cdot 40 \cdot 12 \geq 1000000$	1	Už gautą teisingą nelygybę tik su vienu nežinomuju B .
Išsprendžiame nelygybę ir gauname: $B \geq \frac{500}{9}$	1	Už gautą teisingą nelygybės sprendinį.
Ats.: bent 56 eurai.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite, kokį mėnesinį atlyginimą Marius gaus dirbdamas antraisiais metais: prie pradinio atlyginimo pridėkite priedą už vienus darbo metus.

2 užuomina. Kai apskaičiuosite, kiek Marius uždirbs per vieną mėnesį su priedu, apskaičiuokite, kiek tokiu pat būdu jis uždirbs per vienus metus.

2 užduotis

1 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad atlyginimas kiekvieną mėnesį padidėja pastoviu kiekiu. Pritaikykite aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę su $n = 40$. Nepamirškite, kad atlyginimas gaunamas 12 kartų per metus.

2 užuomina. Kai nustatysite formulę, kuria apskaičiuojama per 40 metų gautų atlyginimų suma, įsistatykite į ją iš sąlygos žinomus teisingus dydžius.

3 užuomina. Kokia nelygybė turi galioti gautam reiškiniui? Už kokią sumą šis reiškinys turi būti ne mažesnis? Sudarykite nelygybę ir ją išspręskite. Atkreipkite dėmesį, kad atsakymą reikia suapvalinti iki sveikojo skaičiaus.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	11	Modeliai ir sąryšiai	Bendrasis kursas	Progresijos	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Progresijos	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	5

Virusų plitimo modeliavimas

Bendroji įvestis

Mokslininkai tiria naujo viruso plitimą ir sukūrė matematinį viruso plitimo modelį. Sakykime, kad iš pradžių suserga 100 žmonių. Pagal mokslininkų sukurtą modelį, kiekvieną dieną:

- kiekvienas sergantis žmogus užkrečia vidutiniškai 0,5 naujo žmogaus (t. y. sergančiųjų skaičius didėja 50 %, palyginti su sergančiųjų skaičiumi prieš tai buvusią dieną);
- 10 % sergančiųjų kiekvieną dieną, palyginti su prieš tai buvusią dieną, pasveiksta. Persirgęs žmogus turi tokią pačią tikimybę susirgti dar kartą, kaip ir nesirgęs žmogus.

Taikydami šį matematinį modelį, mokslininkai prognozuoja, kaip keisis situacija ateityje.

Užduotys

1 užduotis

Jei pirmąją dieną suserga 100 žmonių, kiek žmonių sirgs antrąją dieną?

Pažymėkime P_t – sergančiųjų skaičius t dieną. Sudarykite formulę, pagal kurią galima apskaičiuoti P_{t+1} , jei jau žinoma P_t reikšmė. Laikykime, kad t reiškia dienų skaičių, todėl $t \in \mathbb{N}$, t. y. $t = 1, 2, 3, \dots$

2 užduotis

Apskaičiuokite, kelintą dieną, pagal mokslininkų sukurtą modelį, sergančių žmonių bus daugiau nei 1 000.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Kadangi kiekvieną dieną sergančiųjų skaičius padidėja 50 %, o 10 % sergančiųjų pasveiksta, sergančiųjų skaičius antrąją dieną lygus: $100 + 0,5 \cdot 100 - 0,1 \cdot 100 = 140.$	1	Už teisingai apskaičiuotą sergančiųjų žmonių skaičių antrą dieną.
Taigi, gaunama tokia rekurentinė formulė: $P_{t+1} = P_t + 0,5P_t - 0,1P_t = 1,4 \cdot P_t.$	1	Už sudarytą teisingą rekurentinę formulę.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Ieškome mažiausio t , kad $P_t > 1000$. Žinome, kad $P_1 = 100$, tuomet t dieną sergančiųjų bus: $P_t = 100 \cdot 1,4^{t-1}$.	1	Už sudarytą teisingą sekos t -ojo nario formulę.
Gauname nelygybę: $100 \cdot 1,4^{t-1} > 1000 \Rightarrow 1,4^{t-1} > 10.$	1	Už sudarytą teisingą nelygybę.
Taigi, pritaikome logaritmą (pagrindu 10) gautai nelygybei: $\lg 1,4^{t-1} > \lg 10.$ $(t-1)\lg 1,4 > 1.$ $(t-1) > \frac{1}{\lg 1,4}.$ $t > \frac{1}{\lg 1,4} + 1.$	1	Už gautą teisingą išraišką nežinomajam apskaičiuoti.
Apskaičiuojame t reikšmę: $\frac{1}{\lg 1,4} + 1 \approx 7,84$ $t > 7,84$ $t = 8$ Ats.: 8 dieną.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Galima apskaičiuoti t naudojant kito pagrindo logaritmą.		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Jei skaičių 100 padidiname 50 %, tačiau taip pat sumažiname 10 %, palyginti su prieš tai buvusia diena, kokia skaičiaus dalis lieka?

2 užuomina. Jei turime P_t sergančių žmonių, kaip apskaičiuoti kitą dieną sergančių žmonių skaičių P_{t+1} ? Užrašykite rekurentinę formulę P_{t+1} apskaičiuoti per P_t .

2 užduotis

1 užuomina. Jei iš pradžių buvo 100 sergančiųjų ir kiekvieną kitą dieną sergančių žmonių būna 40 % daugiau nei ankstesnę dieną, kiek sergančių bus 2 dieną? 3 dieną? t dieną?

2 užuomina. Žinoma, kad sergančių žmonių skaičius t dieną turi būti ne mažesnis nei 1 000. Sudarykite nelygį ir jį išspręskite. Naudokite logaritmą abiem lygties pusėms. Nepamirškite atsakymo suapvalinti iki sveikąjį skaičių.

Metaduomenys

Progresijos.

Nr.	Klasė	BP Sritis		Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	11	Modeliai ir sąryšiai	Bendrasis	Progresijos	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Progresijos	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	4

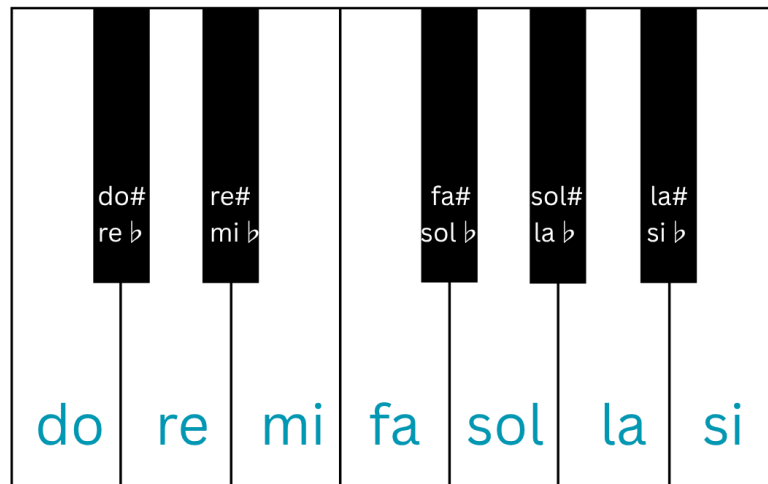
Temperuotas derinimas

Bendroji įvestis

Kiekvienas muzikantas ir muzikantė žino, kad prieš grojant instrumentu jį reikia suderinti. Tai reiškia, kad visos natos turi skambėti tam tikrais tiksliais dažniais.

Kai instrumentas skleidžia garsą, jis sukuria garso bangas – tam tikrų dažnių oro vibracijas. Vibracijų dažniai matuojami hercais (Hz), kurie nurodo, kiek kartų per sekundę oras suvibruoja. Pavyzdžiui: A_4 (*la*) dažnis yra 440 Hz – tai reiškia, kad oras suvibruoja 440 kartų per sekundę. Jei dažnis padvigubėja (tampa 880 Hz), jis skamba oktava aukščiau.

Šiuolaikiniai instrumentai, tokie kaip fortepijonai ar gitaros, derinami naudojant tolygųjį derinimą (temperaciją). Kiekviena oktava padalijama į 12 vienodų intervalų (pustonių), kurių kiekvieno dažnis gaunamas dauginant ankstesnį dažnį iš $\sqrt[12]{2}$. Tai leidžia groti bet kurioje tonacijoje, nes visi pustoniai yra vienodai nutolę vienas nuo kito.



Yra žinoma, kad natos *la* dažnis lygus 440 Hz. Be to, natų pavadinimai kartojasi periodiškai – po *si* einanti aukštesnės oktavos nata vėl yra *do* ir t. t.

Užduotys

1 užduotis

Koks yra *la #* ir *si* natų dažnis hercais? Atsakymą suapvalinkite iki sveikojo skaičiaus.

2 užduotis

Natos dažnis 622 Hz (tiksliau, $440\sqrt{2}$). Kokia tai aukštesnės (gretimos) oktavos nata?

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Natų dažniai sudaro geometrinę progresiją. Geometrinės progresijos $b_1 = 440$ (atitinka la), $q = \sqrt[12]{2}$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (geometrinės progresijos pirmojo nario ir daugiklio nustatymą).
Tuomet natą la # atitinka b_2 : $b_2 = 440 \cdot \sqrt[12]{2} \approx 466$.	1	Už gautą teisingą atsakymą (natos la # hercų skaičių).
Tuomet natą si atitinka b_3 : $b_3 = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^2 \approx 494$.	1	Už gautą teisingą atsakymą (natos si hercų skaičių).

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Geometrinės progresijos n -ojo nario formulė: $b_n = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^n$. Todėl turime lygtį: $440 \cdot (\sqrt[12]{2})^n = 440 \cdot \sqrt{2}$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (sudarytą teisingą lygtį).
Supaprastiname lygtį ir gauname: $2^{\frac{n}{12}} = 2^{\frac{1}{2}}$, todėl: $\frac{n}{12} = \frac{1}{2}$.	1	Už gautą teisingą tiesinę lygtį kintamajam n apskaičiuoti.
Išsprendžiame lygtį ir gauname: $n = 6$.	1	Už teisingai apskaičiuotą lygties sprendinį.
Ats.: tai atitinka natą re # (arba mi b)	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad pagal užduoties sąlygą natų dažniai sudaro geometrinę progresiją.

2 užuomina. Sakykime, kad natos la dažnis yra pirmasis geometrinės progresijos narys b_1 . Kam lygus geometrinės progresijos daugiklis q ? Kokias natas atitinka antrasis ir trečiasis šios geometrinės progresijos nariai? Apskaičiuokite juos.

2 užduotis

1 užuomina. Pagal sąlygoje pateiktus duomenis sudarykite geometrinės progresijos n -ojo nario formulę.

2 užuomina. Pasinaudokite geometrinės progresijos n -ojo nario formule ir apskaičiuokite, kelinto nario dažnis lygus $440 \cdot \sqrt{2}$. Atkreipkite dėmesį, kad $\sqrt{2} = 2^{0,5}$. Pagal gautą dydį nustatykite, kaip vadinama atitinkama nata.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis		Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	11	Modeliai ir sąryšiai	Bendrasis	Progresijos	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	3
2				Progresijos	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	4

Vaistų koncentracija žmogaus organizme

Bendroji įvestis

Dauguma vaistų, patekusių į žmogaus organizmą, pradeda skilti ir po kurio laiko pašalinami per kepenis, inkstus ar kitus organus. Tai reiškia, kad ilgainiui vaistų koncentracija kraujyje mažėja.

Farmacininkai ir gydytojai taiko matematinį modelį, kuris leidžia prognozuoti, kiek laiko vaistas išliks veiksmingas ir kaip dažnai jį reikia vartoti. Šis modelis grindžiamas eksponentiniu skilimu, kai vaisto koncentracija mažėja pagal šią formulę:

$$C(t) = C_0 \cdot e^{-kt}.$$

Čia:

- $C(t)$ – vaisto koncentracija kraujyje po t valandų,
- C_0 – pradinė vaisto koncentracija kraujyje,
- k – pašalinimo greičio konstanta (kaip greitai vaistas šalinamas iš organizmo),
- $e \approx 2,718$ – natūrinio logaritmo pagrindas,
- t – laikas valandomis.

Farmacininkai ir gydytojai naudoja logaritmus, kad galėtų tiksliai apskaičiuoti, kiek laiko veiks vaistas ir kada jo koncentracija pasidarys per maža.

Užduotys

1 užduotis

Gydytojas skiria pacientui antibiotiką, kurio pradinė koncentracija kraujyje yra 200 mg/l.

Mokslininkai nustatė, kad šio antibiotiko pašalinimo greičio konstanta $k = 0,2$. Kokia bus vaisto koncentracija po 5 valandų? Atsakymą pateikite mg/l ir suapvalinkite iki sveikojo skaičiaus.

2 užduotis

Vienas svarbiausių rodiklių farmacijos srityje yra pusinio pašalinimo laikas $t_{1/2}$, t. y. laikas, per kurį vaisto koncentracija sumažėja perpus. Jis padeda nustatyti, kada reikia išgerti kitą dozę, kad vaistas išliktų veiksmingas.

Apskaičiuokite $t_{1/2}$, jeigu pašalinimo greičio konstanta $k = 0,3$. Atsakymą pateikite dviejų reikšminių skaitmenų tikslumu.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Apskaičiuojame, kokia antibiotiko koncentracija kraujyje bus praėjus 5 val.: $C(5) = 200e^{-0,2 \cdot 5}$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Gauname: $C(5) = \frac{200}{e} \approx 74 \text{ mg/l}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Iš sąlygoje pateiktų duomenų sudarome tokią lygtį: $C_0 e^{-0,3t} = \frac{1}{2} C_0$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Pertvarkome lygtį ir gauname: $e^{-0,3t} = \frac{1}{2}$.	1	Už teisingą lygties pertvarkymą.
Logaritmuojame gautą lygtį: $-0,3t = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.	1	Už sudarytą logaritminę lygtį kintamajam t .
Išsprendžiame lygtį ir gauname: $t = \frac{10}{3} \ln(2) \approx 2,3 \text{ val.}$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Kokie trys dydžiai pateikti užduotyje? Įsistatykite juos į $C(t)$ formulę.

2 užuomina. Jei $C_0 = 200$, $k = 0,2$ ir $t = 5$, tuomet kam lygu $C_0 \cdot e^{-kt}$? Nepamirškite atsakymo pateikti mg/l ir suapvalinti iki sveikojo skaičiaus.

2 užduotis

1 užuomina. Pradinę koncentraciją žymite C_0 . Kokią lygtį galite sudaryti iš sąlygoje pateiktų duomenų? Vienoje lygties pusėje užrašykite pusę pradinės koncentracijos, o kitoje – koncentraciją po t valandų.

2 užuomina. Suprastinkite gautą lygtį ir išreikškite eksponentinį narį. Logaritmuokite gautą lygtį, kad sudarytumėte lygtį kintamajam t apskaičiuoti. Apskaičiuokite jo reikšmę ir pateikite atsakymą dviejų reikšminių skaitmenų tikslumu.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis		Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	11	Modeliai ir sąryšiai	Bendrasis	Lygtys	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Lygtys	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	4

Patirties taškai žaidimuose

Bendroji įvestis

Žaidimų kūrėjams kuriant patirties taškų (XP) sistemą, susiduriama su iššūkiu: kaip užtikrinti, kad žaidėjai iš pradžių greitai progresuotų, bet vėliau aukštesni pasiekimų lygiai taptų vis didesniu iššūkiu?

Jei žaidėjai kyla pasiekimų lygiais per greitai, jie greitai praranda motyvaciją – žaidimas tampa per lengvas. Jei kyla per lėtai, jie gali prarasti susidomėjimą, nes progresas atrodo per ilgas.

Kadangi kiekviename lygyje veikėjas turi gauti tam tikrą XP kiekį, kūrėjai gali naudoti skirtingas funkcijas XP augimui modeliuoti.

- **Linijinis augimas:** kiekvienas lygis reikalauja tiek pat papildomų XP.
- **Kvadratinis augimas:** lygiai sunkėja labai greitai.
- **Eksponentinis augimas:** lygiai sunkėja dar greičiau.
- **Logaritminis augimas:** pradžioje sunku, bet vėliau reikalavimai su kiekvienu lygiu vis nuosaikėja.

Logaritminė funkcija auga greitai pradžioje, bet vėliau vis lėtėja. Tai padeda sukurti subalansuotą pažangą, kuri dalį žaidėjų gerai motyvuoja pradžioje ir neatstumia vėliau. Skirtingos XP augimo funkcijos geriausiai atitinka skirtingų žaidėjų grupių psichologinius ypatumus.

Užduotys

1 užduotis

Tarkime, kad žaidimo kūrėjai nusprendė naudoti logaritminę formulę:

$$XP(L) = 1000 + 300 \log_2(L).$$

Čia $XP(L)$ – reikalingi XP taškai pasiekti L -ą lygį.

Kiek XP reikia, norint pasiekti 16 lygį?

2 užduotis

Žaidimo kūrėjai pastebėjo, kad žaidėjai per greitai pasiekia aukštus lygius, todėl XP sistema turi būti sureguliuota. Dabartinė XP sistema:

$$XP(L) = 1200 + 500 \log_2(L).$$

Paaiškėjo, kad naujoji sistema taip pat netenkina žaidimo kūrėjų norų. Jei kūrėjai nori, kad 256-ajam lygiui pasiekti reikėtų bent 9000 patirties taškų, kokį mažiausią sveikąjį skaičių vietoje koeficiento 500 reikia naudoti formulėje?

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
16 lygis bus pasiektas, kai bus surinkta XP taškų: $XP(16) = 1000 + 300 \cdot \log_2(16)$.	1	<i>Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.</i>
Apskaičiavę gauname: $= XP(16) = 1000 + 300 \cdot 4 = 2200$. Ats.: 2200 XP taškų	1	<i>Už gautą teisingą atsakymą.</i>
Pastabos		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Pagal sąlygoje pateiktus duomenis gauname nelygybę: $1200 + k \cdot \log_2(128) \geq 9000$.	1	<i>Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.</i>
Suprastinę nelygybę gauname: $1200 + 8k \geq 9000$. $k \geq 975$. Ats.: 975.	1	<i>Už gautą teisingą atsakymą.</i>
Pastabos		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Jei bus pasiektas 16 lygis, kam bus lygi L reikšmė?

2 užuomina. Įsistatykite $L=16$ į reiškinį $1000 + 300 \log_2(L)$ ir apskaičiuokite jį.

2 užduotis

1 užuomina. Reiškinyje $1200 + 500 \log_2(L)$ vietoje 500 įsistatykite raidę k . Kokią tuomet nelygybę galite sudaryti, kad apskaičiuotumėte k ?

2 užuomina. Išspręskite nelygybę $1200 + k \cdot \log_2(L) \geq 9000$ ir pagal gautą sprendinį pasakykite, kokia turėtų būti k reikšmė, kad 128 lygiui pasiekti būtų reikalinga bent 9000 XP taškų.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis		Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	11	Modeliai ir sąryšiai	Bendrasis	Lygtys	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Nelygybės	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	2

Automatinė laistymo sistema

Bendroji įvestis

Sklype įrengtas 5000 litrų talpos vandens rezervuaras, naudojamas automatinei laistymo sistemai. Nuo 00:00 iki 8:40 rezervuaras pildomas 300 litrų per valandą greičiu, o nuo 6:00 iki 19:00 veikia laistymo sistema, išlaistanti 200 litrų per valandą. Kitu paros metu rezervuaras nei pildomas, nei naudojamas. Šis ciklas kartojasi kasdien, o kiekvieną vidurnaktį (00:00) rezervuare būna lygiai 2500 litrų vandens.

Užduotys

1 užduotis

Kiek valandų per parą rezervuaras stovi nenaudojamas (nei pildomas, nei tuštinamas)?

2 užduotis

Kuriuo paros momentu rezervuare būna daugiausia vandens? Kad pagrįstumėte savo atsakymą, remkitės vandens pildymo ir laistymo laiko intervalais.

3 užduotis

Per kiek laiko ištuštės rezervuaras, jei per naktį (įvestyje nurodytu laiko tarpsniu) jis pildomas tik 200 l/h greičiu? Atsakymą pateikite suapvalintą iki vienetų.

4 užduotis

Pasinaudokite įvestyje pateiktais duomenimis ir **apibrėžkite funkciją $V(t)$** , nusakančią vandens kiekį rezervuare bet kuriuo paros metu t . Čia t reiškia **laiką nuo paros pradžios**, išreikštą valandomis, pavyzdžiui: $t = 0$ atitinka 00:00, $t = 13,5$ atitinka 13:30; $0 \leq t < 24$).

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
<i>Sprendimas ir/arba atsakymas</i>	<i>Taškai</i>	<i>Taškų paaiškinimas</i>
	1	
Bendras laiko intervalas, kai kažkas vyksta: nuo 00:00 iki 19:00, t. y. 19 val. Paros trukmė: 24 val. Laikotarpis, kai niekas nevyksta: $24 - 19 = 5$ val. Ats.: 5 valandos.	1	<i>Už gautą teisingą atsakymą.</i>

2 užduoties vertinimas		
<i>Sprendimas ir/arba atsakymas</i>	<i>Taškai</i>	<i>Taškų paaiškinimas</i>
	1	
Vandens kiekis auga, kai pildymas > laistymas. Pildymo greitis: 300 l/h Laistymo greitis: 200 l/h Grynas prieaugis nuo 6:00 iki 8:40: laistymas + pildymas → grynas pildymas = 100 l/h Nuo 00:00 iki 6:00 – tik pildymas → 300 l/h Didžiausias kiekis bus 8:40, kai pildymas baigiasi, bet laistymas tęsiasi. Ats.: 8:40 val.	1	<i>Už teisingą atsakymą su argumentu.</i>

3 užduoties vertinimas		
<i>Sprendimas ir/arba atsakymas</i>	<i>Taškai</i>	<i>Taškų paaiškinimas</i>
	2	
Skaičiuojame paros pokytį. Pildymo laikas: 8,67 h Pildoma: $200 \cdot 8,67 = 1733,3$ l Laistymo laikas: 13 h Išlaistoma: $200 \cdot 13 = 2600$ l Grynas pokytis per parą: $1733,3 - 2600 = -866,7$ l Pradinis kiekis: 2500 l Kiek dienų iki ištuštėjimo? $\frac{2500}{866,7} \approx 2,88$ Ats.: rezervuaras ištuštės po 3 dienų.	1	<i>Už pasirinktą teisingą skaičiavimo būdą.</i>
	1	<i>Už padarytą teisingą išvadą.</i>

4 užduoties vertinimas		
<i>Sprendimas ir/arba atsakymas</i>	<i>Taškai</i>	<i>Taškų paaiškinimas</i>
	4	

$V(t)$ – vandens kiekio rezervuare funkcija, kur t – laikas valandomis nuo 00:00 (tarpas $0 \leq t < 24$). Pradinė būseną: 2500 l Funkcija bus skirtingai apibrėžta keturiuose skirtinguose laiko intervaluose: [0; 6): tik pildymas [6; 8.67): pildymas + laistymas [8.67; 19): tik laistymas [19; 24): niekas nevyksta $V(t) = \begin{cases} 2500 + 300t, & \text{kai } t \in [0; 6) \\ 4300 + 100(t - 6), & \text{kai } t \in \left[6; \frac{26}{3}\right) \\ \frac{13700}{3} - 200\left(t - \frac{26}{3}\right), & \text{kai } t \in \left[\frac{26}{3}; 19\right) \\ 2500, & \text{kai } t \in [19; 24) \end{cases}$	4	<i>Po 1 tašką už kiekvieno laiko intervalo ir funkcijos jame nustatymą.</i>
Pastabos		
<i>Teisingu atsakymu taip pat laikoma, jei trupmenos pateikiamos suapvalintos.</i>		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Nurodykite laiko intervalą per parą, kai rezervuaras pildomas arba tuštinamas, t. y., kai kažkas vyksta.

2 užuomina. Apskaičiuokite, kiek laiko per parą nieko nevyksta.

3 užuomina. Atminkite, kad 24 val. – tai visa para.

2 užduotis

1 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kada pradedama ir baigiama pildyti vandenį.

2 užuomina. Įvertinkite, kada pradedama laistyti, ir ar tuo metu rezervuaras dar pildomas.

3 užuomina. Pasvarstykite, kada pasiekama aukščiausia vandens kiekio reikšmė.

3 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite, kiek vandens per parą įteka ir išteka.

2 užuomina. Nustatykite paros balansą, t. y., kaip pasikeičia vandens kiekis – padidėja ar sumažėja per parą.

3 užuomina. Įvertinkite, kiek laiko prireiks rezervuarui ištuštėti nuo 2500 l iki 0 l.

4 užduotis

1 užuomina. Suskaidykite parą į laiko atkarpas pagal sąlygą.

2 užuomina. Pradinį vandens kiekį laikykite pradine sąlyga ir sudarykite atskiras išraiškas kiekvienam intervalui.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrūpis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	11	Modeliai ir sąryšiai	Bendras	Funkcijos.	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Slenkstinis	1
2				Funkcijos.	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	1
3				Funkcijos.	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	2
4				Funkcijos.	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Aukštesnysis	4

III GIMANZIJO KLASE, IŠPLESTINIS KURSAS, SKAIČIAI IR SKAIČIAVIMAI

Iracionalieji skaičiai

Bendroji įvestis

Vienas iš garsiųjų senovės Graikijos matematikų Hipasas Metapontietis, gyvenęs V a. pr. Kr., žinomas dėl savo atradimų, susijusių su iracionaliaisiais skaičiais. Šie jo atradimai sukėlė daugybės jo amžininkų filosofų pasipiktinimą. Kartais juokais jam priskiriamas net iracionalumo atradimas.

Tais laikais Pitagoro teorema jau buvo seniai žinoma. Tačiau ne viskas apie ją buvo aišku. Pavyzdžiui, jei dviejų trikampio statinių ilgiai yra po 1 cm, tuomet, pagal Pitagoro teoremą, trečioji trikampio kraštinė lygi $\sqrt{2}$ cm. Ar šis skaičius racionalusis? Hipasui Metapontiečiui pavyko įrodyti, kad šis skaičius nėra racionalusis.

Racionaliuoju skaičiumi vadinamas toks skaičius, kuris yra užrašomas santykiu $\frac{a}{b}$, čia a – sveikasis skaičius, o b – natūralusis skaičius. Be to racionalieji skaičiai turi tokią savybę: jie vieninteliu būdu užrašomi pavidalu $\frac{a}{b}$ taip, kad a ir b būtų nesuprastinami skaičiai (t. y. tarpusavyje jie yra pirminiai). Remiantis šia savybe galima įrodyti, kad skaičius $\sqrt{2}$ nėra racionalusis.

Užduotys

1 užduotis

Patikrinkite, ar trupmena $\frac{6}{57}$ yra suprastinama. Jei taip, suprastinkite ir užrašykite ją pavidalu $\frac{a}{b}$, kur a ir b būtų nesuprastinami natūralieji skaičiai.

2 užduotis

Hipasas Metapontietis, norėdamas įrodyti, kad skaičiaus $\sqrt{2}$ negalima užrašyti kaip racionaliosios trupmenos, pritaikė prieštaros metodą.

Tarkime, norime įrodyti, kad $\sqrt{3}$ nėra racionalusis skaičius. Norint įrodyti prieštaros metodu, visų pirma reikia daryti prielaidą, kad yra priešingai negu norime įrodyti, t. y. reikia tvirtinti, kad $\sqrt{3}$ yra racionalusis skaičius. Atliekant matematinius veiksmus ir susidūrus su prieštaravimu reikėtų, kad tokia išraiška negali egzistuoti nuo pat pradžių, t. y. galėtume teigti, kad $\sqrt{3}$ vis dėlto nėra racionalusis skaičius.

Darykime prielaidą, kad skaičius $\sqrt{3}$ yra racionalusis, t. y. egzistuoja tokia nesuprastinama trupmena su natūraliaisiais skaičiais a ir b , kad $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$. Gaukite prieštaravimą, kuris parodytų, kad toks pavidalas egzistuoti negali.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Išskaidome skaitiklį ir vardiklį dauginamaisiais. Gauname: $\frac{6}{57} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 19}.$ Tinka ir pastebėti, kad abu dalūs iš 3. Ats.: suprastinama iki $\frac{2}{19}$.	1	Už teisingai nustatytą bendrą skaitiklio ir vardiklio daliklį.
	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
Pakeliame lygybę kvadratu ir gauname: $3 = \frac{a^2}{b^2}.$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą lygtį kelti kvadratu.
Tada $3b^2 = a^2$. Pagal mūsų padarytą prielaidą, natūralieji skaičiai a ir b bendrų daliklių neturi, todėl a turi būti 3 kartotinis.	1	Už nustatymą, kad a yra 3 kartotinis.
Vadinasi, egzistuoja toks natūralusis skaičius k, kai $a = 3 \cdot k$.	1	Už pritaiktą kartotinio skaičiaus savybę skaičiui a .
Tada $3b^2 = 9 \cdot k^2$ arba $b^2 = 3 \cdot k^2$, todėl b – irgi 3 kartotinis.	1	Už nustatymą, kad b yra 3 kartotinis.
Susidūrėme su prieštaravimu – a ir b turi bendrą daliklį 3, t. y. nėra tarpusavyje pirminiai.	1	Už teisingą prieštaravimo pagrindimą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Pabandykite išskaidyti skaitiklio ir vardiklio skaičius dauginamaisiais. Ar randate bendrų daliklių?

2 užuomina. Kokių dviejų pirminių skaičių sandauga yra skaičius 6? Ar skaičius 57 dalijasi iš kurio nors iš šių skaičių? Jei taip, padalykite.

2 užduotis

1 užuomina. Pakelkite lygybę kvadratu ir išreikškite, kam lygus a^2 . Ką iš gautos išraiškos galite pasakyti apie skaičių a ?

2 užuomina. Pagalvokite, ar skaičius a yra 3 kartotinis. Jei taip, teigiami 3 kartotiniai skaičiai gali būti užrašomi pavidalu $2 \cdot k$, kur k – natūralusis skaičius.

3 užuomina. Jeigu a būtų 3 kartotinis, tuomet ar b irgi būtų 3 kartotinis?

4 užuomina. Jeigu ir skaičius a , ir skaičius b abu turėtų tą patį daliklį, kokiai sąlygai tai prieštarautų? Kokią išvadą iš to galite padaryti?

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	11	Skaičiai ir skaičiavimai	Išplėstinis	Skaičių aibės	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	2
2				Šaknys	Loginis mąstymas ir įrodymai	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	5

Realieji skaičiai

Bendroji įvestis

Bet kuris realusis skaičius yra arba racionalusis, arba iracionalusis. Pavyzdžiui, skaičiai $\frac{9}{4}$, -2 , 0 yra racionalieji, o skaičiai $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{6}$, $\ln 2$ yra iracionalieji.

Derinant iracionaliuosius skaičius, kartais galima gauti rezultatą, kuris yra racionalusis skaičius. Pavyzdžiui, sudauginus du iracionaliuosius skaičius $\sqrt{2}$ ir $\sqrt{2}$ gaunamas racionalusis skaičius:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$$

Užduotys

1 užduotis

Sugalvokite du iracionaliuosius skaičius, kurių suma yra racionalusis skaičius. Atsakymą pagrįskite skaičiavimais.

2 užduotis

Sugalvokite tris iracionaliuosius skaičius, kurių sandauga yra racionalusis skaičius. Atsakymą pagrįskite skaičiavimais.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Pvz.: $\sqrt{2}$ ir $-\sqrt{2}$.	1	Už pateiktą teisingą skaičių poros pavyzdį.
Sudedame šiuos skaičius ir gauname: $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$.	1	Už gautą rezultatą, kuris yra racionalusis skaičius.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Pvz.: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ir $\sqrt{6}$.	1	Už pateiktą teisingą skaičių trejeto pavyzdį.
Sudauginame šiuos skaičius ir gauname: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{36} = 6$.	1	Už gautą rezultatą, kuris yra racionalusis skaičius.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Kokie turėtų būti iracionalieji skaičiai, kad jų sandauga būtų racionalusis skaičius? Įvertinkite jų teigiamumą / neigiamumą.

2 užuomina. Pagalvokite: kokie turėtų būti dviejų šaknų ženklai, kad jas sudėjus jos viena kitą panaikintų?

3 užuomina. Nepamirškite savo sugalvotos skaičių poros sudėti ir apskaičiuoti rezultato.

2 užduotis

1 užuomina. Kokie turėtų būti trys iracionalieji skaičiai, kad jų sandauga būtų racionalusis skaičius? Pavyzdžiui, jei šie trys skaičiai būtų šaknys iš skaičių A, B ir C, kokia sąlyga turėtų galioti sandaugai $A \cdot B \cdot C$?

2 užuomina. Sugalvokite tokius tris sveikuosius skaičius A, B ir C, kurių sandauga būtų pilnasis kvadratas, tačiau šaknys iš skaičių A, B ir C būtų iracionalieji skaičiai.

3 užuomina. Pavyzdžiui, kokius tris sveikuosius skaičius reikia sudauginti, kad rezultatas būtų 36? Sugalvokite tokius tris skaičius, kad šaknys iš jų būtų iracionalieji skaičiai. Pagal tai pateikite atsakymą.

4 užuomina. Nepamirškite sudauginti savo sugalvotų trijų skaičių ir apskaičiuoti rezultato.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis		Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	11	Skaičiai ir skaičiavimai	Išplėstinis	Skaičių aibės	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Skaičių aibės	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Aukštesnysis	2

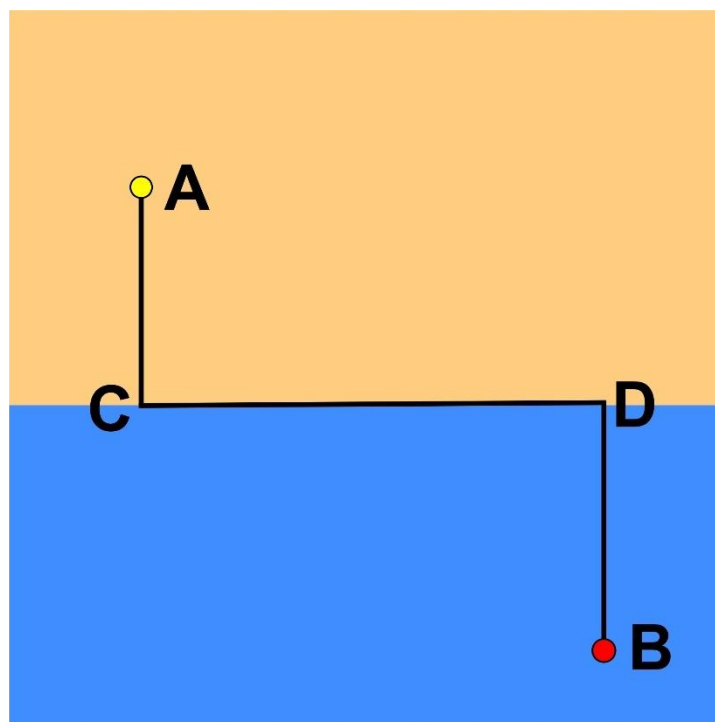
MS-12-432. Šiaudinė skrybėlė (11 kl.)

Bendroji įvestis

Prie ežero pakilo vėjas ir nupūtė į vandenį gražią šiaudinę skrybėlę. Poilsiautojas iškart pašoko ir svarsto, kokia trajektorija bėgti iki skrybėlės, kad kuo greičiau ją ištrauktų.

Žymėkime vietovės plane poilsiautojo vietą tašku A, o skrybėlės vietą tašku B. Tegul atstumas nuo poilsiautojo iki kranto lygus $AC=10$ m, atstumas nuo skrybėlės iki kranto lygus $BD=10$ m, o atstumas tarp poilsiautojo ir skrybėlės palei krantą lygus $CD=75$ m.

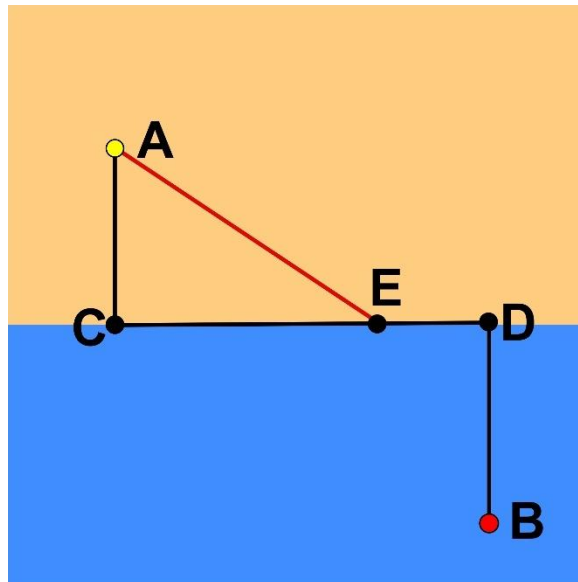
Tuomet situaciją galime atvaizduoti tokia supaprastinta schema:



Užduotys

1 užduotis

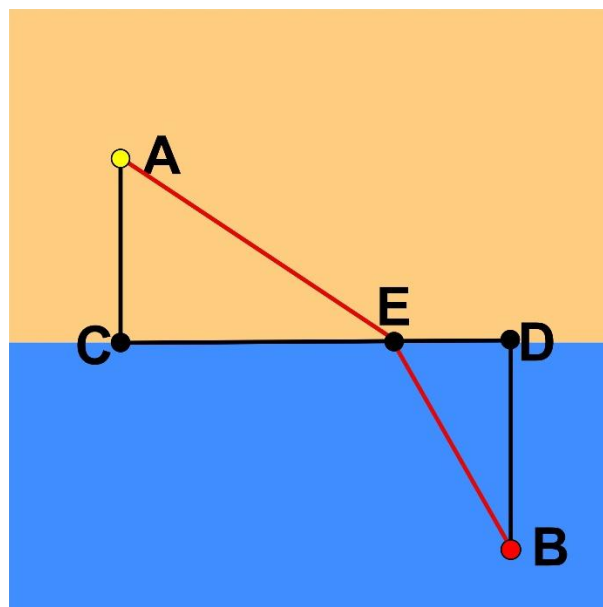
Sakykime, poilsiautojas pasirinko bėgti atkarpa AE link kranto tokia kryptimi, kad $\angle CAE = 60^\circ$. Apskaičiuokite atstumą AE.



2 užduotis

Sakykime, poilsiautojas bėga iki kranto taško E atkarpa AE. Tuomet jis brenda iki taško B atkarpa EB. Pažymėkite atstumą $DE=x$.

Apskaičiuokite x reikšmę, jeigu žinoma, kad $\frac{\sin \angle AEC}{\sin \angle BED} = \frac{2}{5}$.



Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Pagal trikampio ACE kampo CAE kosinuso savybę gauname: $\cos \angle CAE = \frac{AC}{AE}$, arba $\cos 60^\circ = \frac{10}{AE}$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Taigi, gauname: $AE = \frac{10}{\cos 60^\circ} = \frac{10}{0,5} = 20$. Ats.: AE=20 m.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Pirmasis taškas taip pat skiriamas, jeigu pritaikoma 30° kampo sinuso savybė arba stačiojo trikampio su 30° kampu savybė.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	6	
Pagal Pitagoro teoremą trikampiui AEC, gauname AE ilgį: $AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{100 + (75 - x)^2}$.	1	Už gautą AE ilgio išraišką per x, pasinaudojant Pitagoro teorema.
Pagal Pitagoro teoremą trikampiui BED, gauname BE ilgį: $BE = \sqrt{BD^2 + DE^2} = \sqrt{100 + x^2}$.	1	Už gautą BE ilgio išraišką per x, pasinaudojant Pitagoro teorema.
Taigi, pagal sąlygą $\frac{\sin \angle AEC}{\sin \angle BED} = \frac{2}{5}$ gauname tokią lygtį: $\frac{\frac{10}{\sqrt{100 + (75 - x)^2}}}{\frac{10}{\sqrt{100 + x^2}}} = \frac{2}{5}$	1	Už sudarytą teisingą lygtį x rasti.
Pertvarkome gautą lygtį taip, kad pašalintume iracionalumą vardiklyje, ir gauname: $\frac{50}{\sqrt{100 + (75 - x)^2}} = \frac{20}{\sqrt{100 + x^2}}$ todėl: $5 \cdot \sqrt{100 + x^2} = 2 \cdot \sqrt{100 + (75 - x)^2}$.	1	Už gautos lygties iracionalumo vardiklyje pašalinimą.
Pakėlę abi puses kvadratu ir sutraukę panašiuosius narius gauname kvadratinę lygtį: $21x^2 + 600x - 20400 = 0$.	1	Už gautą teisingą kvadratinę lygtį.
Išsprendžiame lygtį ir gauname: $x_1 = 20, x_2 = -\frac{340}{7}$. Ats.: x = 20.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite stačiojo trikampio kampo kosinuso savybę.

2 užuomina. Užrašykite, kam lygus kampo CAE kosinusas? Į gautą išraišką įsistatykite žinomus dydžius ir apskaičiuokite AE ilgį.

2 užduotis

1 užuomina. Pritaikykite Pitagoro teoremą ir užrašykite, kam lygūs AE ir BE ilgiai. Išreikškite juos per x .

2 užuomina. Nustatę AE ir BE ilgius, prisiminkite stačiojo trikampio kampo sinuso savybę. Pagal ją užrašykite, kam lygios $\angle AEC$ ir $\angle BED$ sinuso reikšmės.

3 užuomina. Išreikškę $\sin \angle AEC$ ir $\sin \angle BED$ per x , įsistatykite gautus dydžius į sąlygoje pateiktą lygybę $\frac{\sin \angle AEC}{\sin \angle BED} = \frac{2}{5}$. Pertvarkykite reiškinį taip, kad gautumėte kvadratinę lygtį pagal x . Suprastinę ir išsprendę ją nepamirškite, kad x reikšmė negali būti neigiama.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis		Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	11	Skaiciai ir skaičiavimai	Išplėstinis	Sinusas, kosinusas ir tangentas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Sinusas, kosinusas ir tangentas	Loginis mąstymas ir įrodymai	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	6

III GIMANZIJOS KLASĖ, IŠPLĖSTINIS KURSAS, MODELIAI IR SĄRYŠIAI

Pusiausvyros taškai

Bendroji įvestis

Kai dėl vienų priežasčių vyksta stebimo dydžio augimas, o dėl kitų priežasčių – mažėjimas, gali būti svarbu nustatyti proceso nusistovėjimo reikšmę.

Tokie taškai, kuriuose procesas nusistovi, vadinami pusiausvyros taškais (arba ekvilibriumais). Su jų reikšmėmis tam tikro dydžio augimas lygus mažėjimui.

Pavyzdžiui, ežere esančių žuvų skaičius per mėnesį paauga 10 %, tačiau žvejai per mėnesį sugauna 100 žuvų. Tokiu atveju 1 000 žuvų yra šio proceso populiacijos pusiausvyros taškas. Kadangi 10 % prieaugis 1 000 žuvų yra lygus 100, žuvų skaičiaus augimas lygus mažėjimui. Kitas pusiausvyros taškas yra 0 žuvų, nes, žuvims išnykus, jų skaičiaus augimo ir mažėjimo tempai irgi sutampa – abu yra lygūs 0.

Užduotys

1 užduotis

Investicijos vertė kasmet padidėja 100 eurų. Tačiau kiekvienų metų gale, kai investicija jau būna paaugusi 100 eurų, bankas nuo investicijos sumos nuskaičiuoja 1 % jos vertės dydžio administravimo mokestį.

Kokia turėtų būti investicijos vertė metų gale prieš pat nuskaičiuojant 1 % administravimo mokestį, kad jos metinis administravimo mokestis būtų lygus investicijos vertės pakilimui per metus?

2 užduotis

Laboratorijos inde gaminama medžiaga. Per valandą jos pagaminama 10 gramų. Po kiekvienos valandos 10 % inde esančios medžiagos paimama kokybės tyrimams.

Kiek gramų medžiagos inde bus po dviejų valandų, jei pradinis medžiagos kiekis buvo 0 gramų?

3 užduotis

Plaukai auga pastoviu 1 cm per mėnesį greičiu ir pradeda augti vos gimus. Jonas visą gyvenimą 1 kartą per mėnesį eina į kirpyklą, kur jam nukerpama 10 % plaukų ilgio.

Apskaičiuokite, kokio ilgio Jono plaukai bus po 10-ojo apsilankymo kirpykloje. Atsakymą pateikite centimetrais, keturių skaitmenų po kablelio tikslumu. Parodykite, kad jei Jonas taip tęstų be galo daug laiko, jo plaukų ilgis nusistovėtų ties 9 cm (po apsilankymo kirpykloje).

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Pritaikome proporciją: 1 % – 100, 100 % – x ; arba $x \cdot 0,01 = 100$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Ats.: investicijos vertė turi būti 10000 eurų.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastaba		
Jei pateikiamas teisingas atsakymas be sprendimo, skiriamas 1 taškas.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Praėjus 1 valandai ir paėmus mėginį kokybės tyrimams, medžiagos inde bus: $(0 + 10) \cdot 0,9 = 9$ g.	1	Už teisingai apskaičiuotą medžiagos kiekį po 1 valandos.
Praėjus antrai valandai ir paėmus mėginį kokybės tyrimams, medžiagos inde bus: $(9 + 10) \cdot 0,9 = 17,1$ g. Ats.: 17,1 g,	1	Už teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
Jono plaukų ilgį po n -ojo apsilankymo kirpykloje pasižymime L_n . Plaukų ilgis po pirmojo apsilankymo: $(0 + 1) \cdot 0,9 = 0,9$ cm. Šį reiškinį galima perrašyti taip: $L_1 = 0,9 = \frac{0,9 - 0,9^2}{1 - 0,9}$.	1	Už teisingai apskaičiuotą plaukų ilgį po 1-ojo apsilankymo kirpykloje. Taškas skiriamas, jeigu apskaičiuota arba tolesniuose skaičiavimuose panaudota, kad plaukų ilgio reikšmė po pirmojo apsilankymo yra 0,9 cm.
Plaukų ilgis po 2 apsilankymų: $L_2 = (0,9 + 1)0,9 = 0,9 + 0,9^2 = 1,71 = \frac{0,9 - 0,9^3}{1 - 0,9}$. Plaukų ilgis po 3 apsilankymų: $L_3 = ((0,9 + 1)0,9 + 1)0,9$ $= 0,9 + 0,9^2 + 0,9^3$ $= \frac{0,9 - 0,9^4}{1 - 0,9}$ Galima spėti, kad, pagal analogiją su geometrinės progresijos sumos formule:	1	Už teisingai suformuluotą hipotezę, kaip apskaičiuoti L_n .

$L_n = 0,9 + 0,9^2 + \dots + 0,9^n = \frac{0,9 - 0,9^{n+1}}{1 - 0,9}$		
Įrodysime šią lygybę matematinės indukcijos metodu. Pirmiau jau parodėme, kad ši formulė teisinga, kai $n = 1$. Tarkime, kad formulė teisinga kažkokiam $n = k \geq 1$. Parodysime, kad tada ji teisinga ir kai $n = k + 1$. Pagal užduoties sąlygą, $L_{k+1} = (L_k + 1)0,9.$ Įsistatome į L_n formulę, kurią įrodinėjame, $n = k$ gauname: $\begin{aligned} L_{k+1} &= \left(\frac{0,9 - 0,9^{k+1}}{1 - 0,9} + 1 \right) 0,9 \\ &= \frac{0,9^2 - 0,9^{k+2} + 0,9 - 0,9^2}{1 - 0,9} \\ &= \frac{0,9 - 0,9^{k+2}}{1 - 0,9} \end{aligned}$ Kitaip tariant, įrodėme, kad jei formulė teisinga, kai $n = k$, tai ji teisinga ir kai $n = k + 1$. Įrodymas baigtas. $L = \frac{0,9}{1 - 0,9}.$	1	<i>Už teisingą formulės įrodymą matematinės indukcijos būdu.</i>
Įsistatome į įrodytą formulę $n = 10$. Gauname: $L_{10} = \frac{0,9 - 0,9^{11}}{1 - 0,9} = 5,8619.$ Gauname, kad po dešimtojo apsilankymo kirpykloje Jono plaukų ilgis bus 5,8619 cm. Ats.: 5,8619 cm.	1	<i>Už teisingai apskaičiuotą L_{10}.</i>
Iš anksčiau įrodytos formulės seka, kad L_n yra lygus nykstamosios geometrinės progresijos, kurios pirmasis narys lygus 0,9 ir geometrinės progresijos vardiklis lygus 0,9, pirmųjų n narių sumai. Tada pasinaudojame nykstamosios geometrinės progresijos sumos formule ir gauname, kad $S = \frac{0,9}{1 - 0,9} = 9 \text{ (cm)}.$ Išvada: jei Jonas taip tęstų be galo daug laiko, jo plaukų ilgis nusistovėtų ties 9 cm.	1	<i>Už teisingą parodymą, kad Jono plaukų ilgis nusistovėtų ties 9 cm.</i>

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Pasižymėkite ieškomą dydį x . Kokią lygtį iš duotų duomenų galite sudaryti, kad rastumėte x ?

2 užuomina. Jei 100 eurų atitinka vieną procentą, o x atitinka šimtą procentų, kam lygu x ?

2 užduotis

1 užuomina. Visų pirma apskaičiuokite, kiek medžiagos inde bus po 1 valandos. Kiek medžiagos buvo pagaminta per pirmą valandą? Kiek jos liko po to, kai dalis buvo paimta tyrimams?

2 užuomina. Apskaičiuokite, kiek medžiagos inde bus po 2 valandų. Per antrąją valandą medžiagos pagaminta dar 10 gramų. Svarbu prisiminti, kad medžiaga inde kaupiasi – 10 % jos paimama tyrimams, įskaitant ir anksčiau pagamintos inde likusios medžiagos kiekį.

3 užuomina. Pradėjote su 0 gramų, prie kurių kartą per valandą pridedate po 10 g ir sumažinate 10 %. Matematiškai šį procesą galite užrašyti taip: $((0 + 10) \cdot 0,9 + 10) \cdot 0,9$. Kam lygus šis reiškiny?

3 užduotis

1 užuomina. Užrašykite matematines išraiškas plaukų ilgiui apskaičiuoti po 1 apsilankymo, po 2, po 3 ir t. t. Atkreipkite dėmesį į skaičiavimuose pasikartojantį dėsnį.

2 užuomina. Šią užduotį galima išspręsti taikant matematinę indukciją. Jono plaukų ilgį po n -ojo apsilankymo kirpykloje pasižymėkite L_n . Apskaičiuokite L_1 ir įsitikinkite, kad galioja $0,9 = \frac{0,9 - 0,9^2}{1 - 0,9}$. Apskaičiuokite L_2 ir išreikškite panašiu pavidalu. Kokį dėsnį pastebite?

3 užuomina. Užrašykite plaukų ilgio formulę po n apsilankymų L_n . Matematinės indukcijos būdu įrodykite, kad galioja $L_{k+1} = (L_k + 1)0,9$. Pagal gautą L_n formulę, nustatykite, kam lygus plaukų ilgis po 10, po be galo daug apsilankymų.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	11	Modeliai ir sąryšiai	Išplėstinis	Progresijos	<i>Matematinis komunikavimas</i>	<i>Matematinis komunikavimas</i>	AMG	Patenkinamas	2
2				Progresijos	<i>Matematinis komunikavimas</i>	<i>Matematinis komunikavimas</i>	AMG	Pagrindinis	2
3				Progresijos	<i>Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas</i>	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	5

Išmanus fontanas

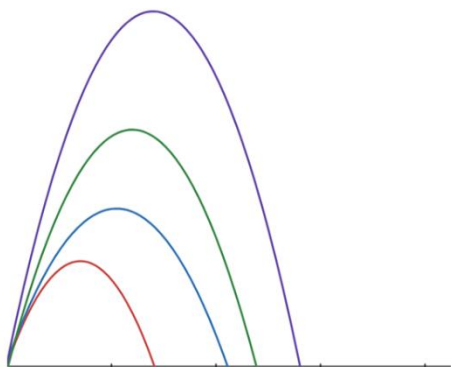
Bendroji įvestis

Skaičiuotėnų miesto jubiliejaus proga buvo nuspręsta įrengti grojantį, šokantį ir šviečiantį fontaną. Buvo parengtas projektas, kad fontanas švirkštų vandens sroves 4 parabolių forma, kurios priklauso nuo grojamos muzikos.

Taigi fontaną sudaro 4 skirtingų aukščių (metrais) parabolės, kurių trajektorijos aprašomos šiomis funkcijomis:

- $y = -x^2 + 2$
- $y = -\frac{2}{3}x^2 + 3$
- $y = -\frac{4}{5}x^2 + 4,5$
- $y = -\frac{6}{7}x^2 + 6,75$

Atkreipkite dėmesį, kad šios funkcijos aprašo tik trajektorijų formą. Laikoma, kad visos funkcijos prasideda tame pačiame taške:



(Paveikslėlis gautas pagal pateiktas paraboles desmos.com skaičiuoklėje – autoriaus pastaba.)

Užduotys

1 užduotis

Miesto merė pasiūlė pridėti dar vieną parabolę, kuri būtų aukštesnė už visas kitas, be to, visų 5 parabolių aukščiausi taškai sudarytų augančią geometrinę progresiją. Koks turėtų būti šios naujos parabolės aukštis?

2 užduotis

Miesto bendruomenė nusprendė padovanoti panašų fontaną Namberviliui – miestui, su kuriuo Skaičiuotėnai draugauja. Tačiau Nambervilio fontaną turėtų sudaryti tik 3 parabolės.

- Žemiausia ir aukščiausia parabolės turi būti tokios kaip pirmoji ir antroji parabolės Skaičiuotėnuose:
 - $y = -x^2 + 2$
 - $y = -\frac{2}{3}x^2 + 3$
- Žemiausios, vidurinės ir aukščiausios parabolės aukščiai sudaro aritmetinę progresiją.
- Žemiausios, vidurinės ir aukščiausios parabolės pločiai sudaro geometrinę progresiją. Parabolės pločiu vadinamas atstumas tarp jos dviejų sąlyčio su pagrindu taškų.

Nustatykite vidurinės parabolės funkciją, kuri atitiktų minėtus reikalavimus.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Parabolės $y = -a^2x + b$, kur $a > 0$, aukščiausias taškas yra aukštyje $y=b$. Taigi, keturių parabolų aukščiai yra: 2; 3; 4,5; 6,75. Santykis 3:2; 4,5:3; 6:4,5 yra 1,5.	1	Už apskaičiuotą geometrinės progresijos vardiklį.
Taigi, penktosios parabolės aukščiausias taškas turėtų būti lygus: $6,75 \cdot 1,5 = \mathbf{10,125\ m}$. Ats.: naujos fontano parabolės aukštis turi būti 10,125 m.	1	Už gautą teisingą atsakymą (penktosios parabolės aukštį).
Pastaba. Taškai skiriami ir tuo atveju, jei mokinys apskaičiuoja kiekvienos parabolės viršūnės tašką ir taip sudėlioja seką.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	6	
Parabolės $y = -a^2x + b$, kur $a > 0$, aukščiausias taškas yra aukštyje $y=b$. Taigi, kadangi skaičiai 2, b ir 3 sudaro aritmetinę progresiją, b galime apskaičiuoti kaip 2 ir 3 aritmetinį vidurkį: $b = \frac{2+3}{2} = 2,5$.	1	Už apskaičiuotą aukštį vidurinei parabolei (laisvojo nario nustatymą).
Apskaičiuojame parabolės $y = -\frac{2}{3}x^2 + 3$ sąlyčio taškus su x ašimi. $0 = -\frac{2}{3}x^2 + 3$ $\frac{2}{3}x^2 = 3$ $x^2 = 3 \cdot \frac{3}{2}$ $x = \pm\sqrt{4,5} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}.$ Taigi, parabolės plotis yra: $2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.	1	Už apskaičiuotus sąlyčio su x ašimi taškus parabolei $y = -\frac{2}{3}x^2 + 3$.
Apskaičiuojame parabolės $y = -x^2 + 2$ sąlyčio taškus su x ašimi. $0 = -x^2 + 2$ $x^2 = 2$ $x = \pm\sqrt{2}$ Taigi, parabolės plotis yra:	1	Už apskaičiuotus sąlyčio su x ašimi taškus parabolei $y = -x^2 + 2$.

$2 \cdot \sqrt{2}$.		
Sakykime, vidurinė parabolė kerta x ašį, kai $x = \pm A$ ir jos plotis yra $2A$. Tuomet reikšmės $2\sqrt{2}$, $2A$, $3\sqrt{2}$ sudaro geometrinę progresiją. A dydį galime apskaičiuoti nustatę geometrinės progresijos vardiklį arba kaip geometrinį vidurkį tarp kitų dviejų dydžių: $2A = \sqrt{2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}} = 2\sqrt{3},$ $A = \sqrt{3}.$	1	<i>Už apskaičiuotą sąlyčio su x ašimi tašką vidurinei parabolei.</i>
Taigi, jeigu vidurinė parabolė $y = -ax^2 + 2,5$ kerta x ašį kai $x = \pm\sqrt{3}$, gauname lygtį koeficientui a apskaičiuoti: $0 = -a \cdot (\sqrt{3})^2 + 2,5$ $3 \cdot a = 2,5$ $a = \frac{2,5}{3} = \frac{5}{6}$	1	<i>Už apskaičiuotą koeficiento a reikšmę vidurinei parabolei.</i>
Taigi, vidurinės parabolės lygtis yra $y = -\frac{5}{6}x^2 + 2,5.$ Ats.: $y = -\frac{5}{6}x^2 + 2,5$	1	<i>Už gautą teisingą atsakymą.</i>
Pastaba. Dydžius b ir A taip pat galima apskaičiuoti naudojantis kitomis progresijų savybėmis. Taškai skiriami už gautas teisingas b ir A reikšmes, nepriklausomai nuo pasirinkto apskaičiavimo metodo.		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite, kad parabolės aukštis (viršūnės taškas) yra tas taškas, kuriame parabolė pasiekia savo maksimalią vertę.

2 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kaip kiekvienos parabolės aukščiai didėja vienas po kito. Ar galite čia pastebėti dėsninę sąryšį?

3 užuomina. Apskaičiuokite pirmos ir antros parabolės aukščio proporciją. Ar ta pati proporcija galioja ir kitoms parabolėms? Pagal tai pratęskite parabolinių aukščių ir apskaičiuokite penktosios parabolės aukštį.

2 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite dviejų duotų parabolinių aukščių aritmetinį vidurkį – taip nustatysite, koks yra vidurinės parabolės aukštis.

2 užuomina. Apskaičiuokite dviejų duotų parabolinių plotius. Pagal tai nustatykite, koks yra vidurinės parabolės plotis. Atkreipkite dėmesį, kad jei trys dydžiai atitinka tris iš eilės einančius geometrinės progresijos narius, tuomet vidurinis iš jų yra kitų dviejų geometrinis vidurkis.

3 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad jei parabolės plotis yra $2A$, tuomet ji kerta x ašį kai $x = \pm A$. Pagal tai galite nustatyti, koks yra koeficiento a dydis vidurinės parabolės lygtyje $y = -ax^2 + b$.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	11	Modeliai ir sąryšiai	išplėstinis	Progresijos	<i>Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas</i>	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	2
2			išplėstinis	Progresijos	<i>Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas</i>	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	6

IV GIMANZIJOS KLASĖ, BENDRASIS KURSAS, MODELIAI IR SĄRYŠIAI

Tūrio išvestinė

Bendroji įvestis

Skritulio ploto ir apskritimo ilgio formulės susijusios ypatingu būdu. Jeigu apskaičiuotume skritulio ploto išraiškos $\pi \cdot R^2$ išvestinę, gautume jo perimetro išraišką $\pi \cdot 2R$.

Tuo pačiu principu susijusios ir rutulio tūrio bei rutulio paviršiaus ploto formulės. Jeigu apskaičiuotume rutulio tūrio išraiškos $\frac{4}{3}\pi \cdot R^3$ išvestinę, gautume jo paviršiaus ploto išraišką $4\pi \cdot R^2$.

Tai ne atsitiktinumas, o matematikos dėsnis. Erdvinės figūros tūrio išvestinė yra susijusi su jos paviršiaus plotu, o plokštuminės figūros ploto išvestinė yra susijusi su jos perimetru.

Šioje užduotyje patikrinsime, ar kubui ši taisyklė galioja taip pat, kaip rutuliui.

Užduotys

1 užduotis

Kubo tūris V užrašomas funkcija $V(x) = x^3$, čia x – kubo kraštinės ilgis. Apskaičiuokite šios funkcijos išvestinę. Taip pat apskaičiuokite, kam lygi išvestinė su reikšme $x = 1$.

2 užduotis

Kam lygus kubo paviršiaus plotas? Nustatykite, ar kubo paviršiaus plotas ir jo tūrio išvestinė yra proporcingi dydžiai. Jei taip, kam lygus jų proporcingumo koeficientas?

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
$V'(x) = (x^3)' = 3x^2$.	1	Už gautą teisingą išvestinę.

$V'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3.$	1	Už teisingai apskaičiuotą išvestinės reikšmę taške $x = 1$.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
$S_{pav} = 6x^2.$	1	Už teisingai pritaiktą kubo paviršiaus ploto formulę.
$6x^2$ atitinka 6 sienų paviršiaus plotą.	1	Už teisingą interpretaciją, kiek kubo sienų atitinka šis narys.
Tūrio išvestinė $V' = 3x^2$ yra proporcinga paviršiaus plotui $6x^2$.	1	Už teisingą išvadą apie tūrio išvestinės ir paviršiaus ploto proporcingumą.
Proporcingumo koeficientas lygus $\frac{6x^2}{3x^2} = 2$ arba $\frac{3x^2}{6x^2} = \frac{1}{2}$	1	Už gautą teisingą proporcingumo koeficientą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite laipsninės funkcijos išvestinės taisyklę ir pagal ją užrašykite, kam lygi x^3 išvestinė.

2 užuomina. Į gautą išvestinę įsistatykite $x = 1$ ir apskaičiuokite reiškinį.

2 užduotis

1 užuomina. Palyginkite kubo paviršiaus ploto formulę ir kubo tūrio išvestinę. Ar šie dydžiai yra proporcingi?

2 užuomina. Jei šie dydžiai proporcingi, padalykite vieną dydį iš kito ir nustatykite jų proporcingumo koeficientą.

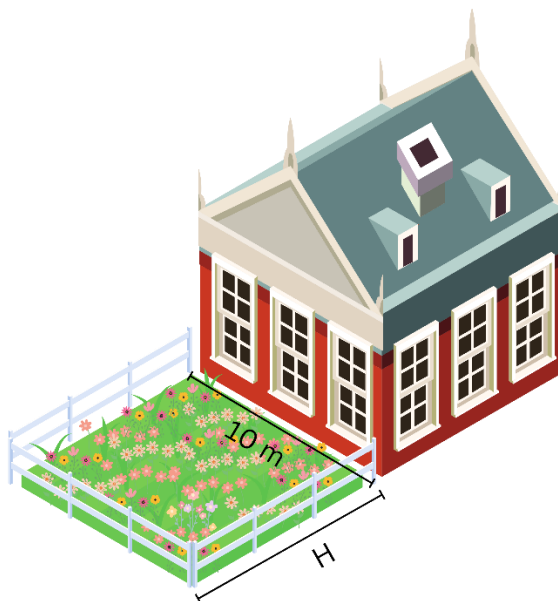
Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis		Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Modeliai ir sąryšiai	Bendrasis	Funkcijos išvestinė	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Funkcijos išvestinė	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Pagrindinis	4

Gėlyno planas 2

Bendroji įvestis

Sodininkas gavo užduotį palei namo sieną įrengti stačiakampį gėlyną. Gėlynas turės būti aptvertas tvora iš trijų pusių (palei namo sieną tvoros nereikia). Namo sienos ilgis yra 10 metrų. Gėlyno ilgį žymėsime H . Sodininkas turi 20 metrų tvoros.



Užduotys

1 užduotis

Sodininkas ketina įrengti gėlyną, kurio ilgis $H = 4$, o plotis – x . Visos turimos tvoros sunaudoti nebūtina.

Sudarykite gėlyno ploto funkciją $S(x)$, kai $x \in (0; 12)$. Apskaičiuokite gautos funkcijos išvestinę.

2 užduotis

Apskaičiuokite maksimalų įmanomą stačiakampio gėlyno plotą, kurį galima aptverti prie sienos panaudojant 20 metrų tvoros. Nustatykite, koks tokiu atveju yra H .

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Duotame intervale gėlyno ploto funkcija: $S(x) = 4 \cdot x$.	1	Už gautą teisingą gėlyno ploto funkciją.
Duotame intervale gėlyno ploto funkcijos išvestinė: $S'(x) = 4$.	1	Už teisingai apskaičiuotą išvestinę.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
Gėlyno plotas: $S = H \cdot (20 - 2 \cdot H)$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą maksimalų gėlyno plotą užrašyti per H .
Gėlyno ploto išvestinė: $S' = (-2 \cdot H^2 + 20 \cdot H)' = -4 \cdot H + 20$.	1	Už apskaičiuotą teisingą ploto funkcijos išvestinę.
Ploto funkcijos kritinis taškas: $H = 5$	1	Už apskaičiuotą teisingą kritinį tašką.
$S' > 0$, kai $H \in [0; 5)$, $S' < 0$, kai $H \in (5; 20]$, Todėl $H = 5$ yra maksimumo taškas.	1	Už įrodymą, kad $H = 5$ yra maksimumo taškas.
Tuomet maksimalus plotas lygus: $S = 5 \cdot 10 = 50 \text{ m}^2$.	1	Už teisingai apskaičiuotą maksimalų gėlyno plotą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Kam lygi gėlyno ploto funkcija? Kokius du dydžius reikia sudauginti, kad būtų gautas plotas?

2 užuomina. Apskaičiuokite gautos funkcijos išvestinę. Prisiminkite laipsninės funkcijos išvestinės taisyklę.

2 užduotis

1 užuomina. Kokius du dydžius reikia sudauginti, norint apskaičiuoti plotą? Užrašykite gėlyno plotą kaip funkciją nuo H .

2 užuomina. Apskaičiuokite šios funkcijos išvestinę. Nustatykite, su kokia x reikšme funkcija įgyja maksimumą.

3 užuomina. Įsistatykite gautą maksimumo x reikšmę į ploto funkciją ir apskaičiuokite, koks galimas maksimalus gėlyno plotas.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Modeliai ir sąryšiai	Bendrasis	Funkcijos išvestinė	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Funkcijos išvestinė	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	5

IV GIMANZIJOS KLASĖ, BENDRASIS KURSAS, GEOMETRIJA IR MATAVIMAI

Didžiojo sprogo teorija

Bendroji įvestis

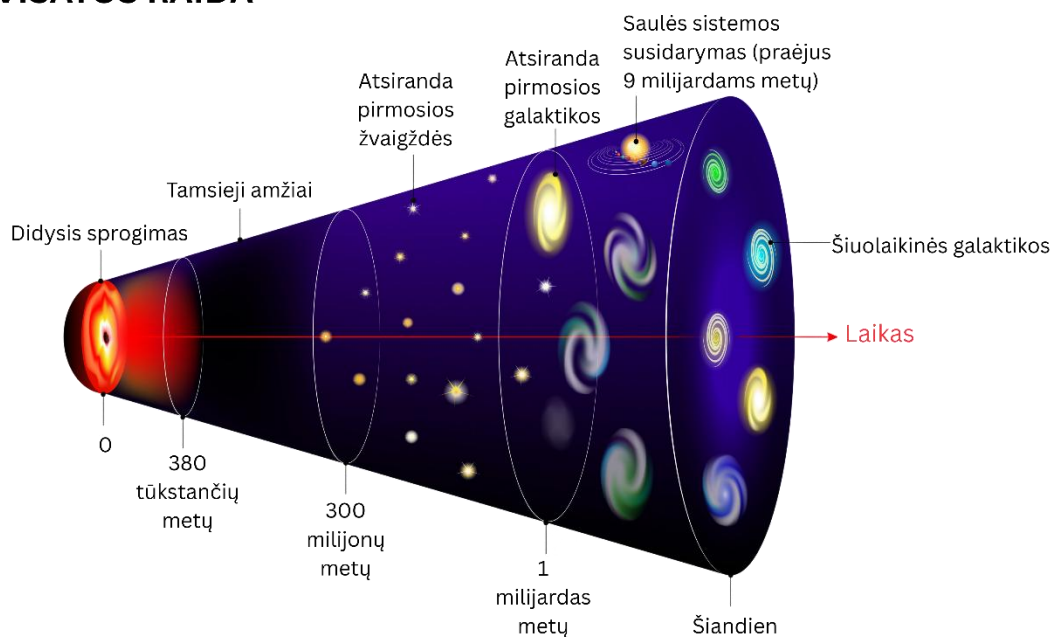
Didžiojo sprogo teorija – tai maždaug prieš šimtą metų sukurta hipotezė apie visatos kilmę. Pagal šią teoriją, visatos pradžia buvo didelis sprogoimas, po kurio ji ėmė plėstis, t. y. visatos objektai ėmė tolti ir vis dar tolsta nuo sprogo vietos.

Vienas iš matematinių modelių Didžiajam sprogimui aprašyti vadinamas FRW modeliu. Pateikime šį modelį supaprastintai: tarkime, kad du objektai dabartinėje visatoje atitinka taškus (x_1, y_1, z_1) ir (x_2, y_2, z_2) . Tuomet atstumas tarp jų laiko momentu $t > 0$ gali būti išreikštas formule

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \cdot \rho(t).$$

Čia šaknies narys atitinka standartinį atstumą trimatėje erdvėje, $\rho(t)$ yra daugiklis, kurio dydis priklauso nuo laiko, o $t = 0$ atitinka Didžiojo sprogo momentą. Manoma, kad, vykstant visatos evoliucijai, daugiklis $\rho(t)$ atitiko įvairias laipsnines ir eksponentines funkcijas, atsižvelgiant į tai, koku greičiu visata plėtėsi.

VISATOS RAIDA



Šaltinis: [Shutterstock](#), ID: 489781135.

Užduotys

1 užduotis

Pagal FRW modelį, šiuo metu daugiklio $\rho(t)$ reikšmė yra lygi vienetui. Remkitės sąlygoje pateikta formule ir apskaičiuokite atstumą tarp objekto, esančio taške $(1, 1, 1)$, bei centro taško $(0, 0, 0)$. Atsakymą pateikite dviejų skaitmenų po kablelio tikslumu.

2 užduotis

Šiuo metu daugiklio $\rho(t)$ reikšmė lygi vienetui, tačiau, kalbant bendriau, šis daugiklis yra išreiškiamas funkcija. Funkcijos kintamasis t atitinka laiką, praėjusį nuo Didžiojo sprogo. Kadangi prieš milijardus metų visatos objektai buvo arčiau vienas kito, anksčiau daugiklio $\rho(t)$ reikšmė buvo mažesnė.

Tarkime, kad daugiklis $\rho(t)$ išreikštas funkcija

$$\rho(t) = 0,9 \cdot \left(\frac{t}{11,7} \right)^{\frac{2}{3}},$$

čia t – laikas, kiek milijardų metų praėjo nuo Didžiojo sprogo. Apskaičiuokite $\rho(3)$ reikšmę. Įstatykite ją į sąlygoje pateiktą formulę ir apskaičiuokite, kam pagal ją lygus atstumas tarp objektų taškuose $(10, 10, 10)$ ir $(12, 13, 14)$, jeigu $t = 3$. Pateikite atsakymą dviejų skaitmenų po kablelio tikslumu.

3 užduotis

Jeigu visatos pradžia iš tikrųjų buvo Didysis sprogo, spėjama, kad ji vėl gali pradėti trauktis. Jeigu matytume, kad kuriuo nors laiku t daugiklio $\rho(t)$ reikšmė priartėtų prie nulio, toks momentas būtų vadinamas Didžiuoju susitraukimu (angl. *Big Crunch*).

Tarkime, kad visata pradėjo trauktis ir daugiklis $\rho(t)$ tam tikru nagrinėjamu laikotarpiu gali būti išreikštas funkcija

$$\rho(t) = \left(\frac{13,78}{t} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Jeigu daugiklis visu nagrinėjamu laikotarpiu bus išreiškiamas šia funkcija, o laiko momentu $t = 13,78$ atstumas tarp dviejų objektų bus lygus 100, koku nagrinėjamo laikotarpio laiko momentu atstumas tarp objektų bus lygus 1? Atsakymą pateikite vienetų tikslumu.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Atstumas tarp objekto ir centro taško: $\sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} \cdot 1$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą pasinaudoti duota formule.
Ats.: $\sqrt{3} \approx 1,73$.	1	Už teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Apskaičiuojame $\rho(3)$ reikšmę, kai $t = 3$. $\rho(3) = 0,9 \cdot \left(\frac{3}{11,7}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 0,36$.	1	Už teisingai apskaičiuotą $\rho(3)$ reikšmę.
Ats.: atstumas tarp objektų nurodytuose taškuose, jeigu $t = 3$: $\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} \cdot 0,36 \approx 1,94$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Akivaizdu, kad $\rho(13,78) = 1$. Atstumas tarp objektų laiko momentu $t = 13,78$ yra lygus 100. Todėl mums reikia rasti tokį laiko momentą t , kad $\left(\frac{13,78}{t}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{100}$. Sprendžiame lygtį, kai $t > 0$: $\frac{13,78}{t} = (10^{-2})^{\frac{3}{2}} = 10^{-3}$; $t = 13,78 \cdot 10^3$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Ats.: $t = 13780$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Įstatykite į sąlygoje duotą atstumo formulę skaičius $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 1)$, $(x_2, y_2, z_2) = (0, 0, 0)$ ir $\rho(t) = 1$.

2 užuomina. Apskaičiuokite, kam lygus reiškinys $\sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} \cdot 1$. Nepamirškite suapvalinti iki dviejų skaitmenų po kablelio.

2 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite, kam lygus $\rho(t) = 0,9 \cdot \left(\frac{t}{11,7}\right)^{\frac{2}{3}}$ su reikšme $t = 3$.

2 užuomina. Apskaičiuotą $\rho(t)$ reikšmę įstatykite į $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \cdot \rho(t)$.

3 užuomina. Įstatykite reikšmes $(x_1, y_1, z_1) = (10, 10, 10)$, $(x_2, y_2, z_2) = (12, 13, 14)$ ir apskaičiuokite, kam lygus reiškinys $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \cdot \rho(t)$. Nepamirškite suapvalinti iki dviejų skaitmenų po kablelio.

3 užduotis

1 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad atstumo skaitinės reikšmės žinoti nebūtina. Pakanka apskaičiuoti, koks turėtų būti t , kad $\rho(t)$, palyginti su $\rho(13,78)$, sumažėtų 100 kartų.

2 užuomina. Apskaičiuokite, koku laiko momentu galios lygybė, nusakanti, kad daugiklis yra šimtą kartų mažesnis nei anksčiau, t. y. išspręskite lygtį $\left(\frac{13,78}{t}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{100}$.

3 užuomina. Spręskite lygtį $\left(\frac{13,78}{t}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{100}$. Visų pirma pakelkite abi puses tokiu laipsniu, kad kairėje liktų pirmojo laipsnio reiškinys. Tada išreikškite t per kitus narius.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrūpis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Geometrija ir matavimai	Bendras	Tiesės, plokštumos, kampai erdvėje	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Tiesės, plokštumos, kampai erdvėje	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	2
3				Tiesės, plokštumos, kampai erdvėje	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	2

Rutulių supakavimas

Bendroji įvestis

Formuojantis kristalams, atomai (arba molekulės) artėja vieni prie kitų ir sudaro junginius, kuriuose yra talpiausiai susispaudę. Pavyzdžiui, dažnai atomai kristaluose yra išsidėstę taip, kaip parduotuvėse į piramides sudėti apelsinai. Tai vienas talpiausių rutulių išdėstymo būdų:



Šaltinis: [Shutterstock](#), ID: 1883907583.

Erdvėje, kurios tūris V_1 , išdėliojame vienodas figūras taip, kad sudėtų figūrų bendras tūris būtų V_2 . Tuomet $\frac{V_2}{V_1}$ vadinsime supakavimo tankiu. Šis dydis priklauso intervalui nuo 0 iki 1 ir atitinka tai, kokią dalį viso tūrio užima į jį įdėtos figūros.

Užduotys

1 užduotis

Kubo formos pakuotės dydis yra $1 \times 1 \times 1 \text{ m}$. Aštuonios tokios pakuotės buvo sudėtos į dėžę, kurios matmenys $2 \times 2 \times 2 \text{ m}$. Apskaičiuokite šio supakavimo tankį.

2 užduotis

Žinoma, kad talpiausiai išdėsčius rutulius erdvėje supakavimo tankis bus 0,74. Jei į $3 \times 3 \times 3 \text{ m}$ dydžio dėžę talpiausiu būdu sudėsime mažus vienodo dydžio rutulius nurodytu tankiu, koks apytiksliai bus joje esančių rutulių tūris kubiniais metrais?

3 užduotis

$2 \times 2 \times 2$ m dydžio konteineryje sudėta 10^9 vienodo dydžio rutuliukų. Apskaičiuokite vieno rutuliuko spindulį, jei jų supakavimo tankis lygus 0,74.

Atsakymą pateikite standartine išraiška ($a \cdot 10^n$, $0 < a < 1$, $n \in \mathbb{N}$) metrais, trijų reikšminių skaitmenų tikslumu.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
$V_1 = 2^3 = 8 \text{ m}^3$.	1	Už teisingai apskaičiuotą V_1 reikšmę.
$V_2 = 8 \cdot 1^3 = 8 \text{ m}^3$.	1	Už teisingai apskaičiuotą V_2 reikšmę.
Supakavimo tankis bus $\frac{V_2}{V_1} = \frac{8}{8} = 1$	1	Už teisingą atsakymą

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
$V_1 = 3^3 = 27 \text{ m}^3$.	1	Už teisingai apskaičiuotą V_1 reikšmę.
$V_2 = 0,74 \cdot 27 = 19,98 \text{ m}^3$.	1	Už teisingai apskaičiuotą V_2 reikšmę.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
$V_1 = 2^3 = 8 \text{ m}^3$.	1	Už teisingai apskaičiuotą V_1 reikšmę.
$V_2 = 0,74 \cdot 8 = 5,92 \text{ m}^3$.	1	Už teisingai apskaičiuotą V_2 reikšmę.
$V_{\text{vieno rutulio}} = \frac{V_2}{10^{10}} = 5,92 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$.	1	Už teisingai apskaičiuotą vieno rutuliuko tūrį.
$\frac{4}{3}\pi R^3 = 5,92 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$.	1	Už teisingai sudarytą lygtį rutuliuko spinduliui rasti.
$R = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \cdot 5,92 \cdot 10^{-9}} \approx 1,12 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.	1	Už teisingai apskaičiuotą rutuliuko spindulio reikšmę R .

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite kubo tūrio formulę. Jeigu kubo kraštinė lygi 2 m, kam lygus jo tūris? Šis dydis atitinka V_1 .

2 užuomina. Jeigu kubo kraštinė lygi 1 m, kam lygus kubo tūris? Kam lygus aštuonių tokių kubų tūris? Šis dydis atitinka V_2 .

2 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite kubo tūrio formulę. Jeigu kubo kraštinė lygi 3 m, kam lygus jo tūris? Šis dydis atitinka V_1 .

2 užuomina. Iš sąlygos žinote, kad supakavimo tankis lygus $\frac{V_2}{V_1}$. Išreikškite ir apskaičiuokite V_2 .

3 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite kubo tūrio formulę. Jeigu kubo kraštinė lygi 2 m, kam lygus jo tūris? Šis dydis atitinka V_1 .

2 užuomina. Iš sąlygos žinote, kad supakavimo tankis lygus $\frac{V_2}{V_1}$. Išreikškite ir apskaičiuokite V_2 .

3 užuomina. Jei žinote visų rutuliukų skaičių ir tai, kokį tūrį jie užima, galite apskaičiuoti vieno rutuliuko užimamą tūrį.

4 užuomina. Jei žinote vieno rutuliuko užimamą tūrį, galite pritaikyti jo tūrio formulę ir pagal ją apskaičiuoti rutuliuko spindulį. Nepamirškite atsakymą pateikti pavidalu $a \cdot 10^n$, $0 < a < 1$, $n \in \mathbb{N}$, trijų reikšminių skaitmenų tikslumu.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Geometrija ir matavimai	Bendrasis	Briauniniai, sukiniai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Slenkstinis	3
2				Briauniniai, sukiniai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
3				Briauniniai, sukiniai	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	5

Antenų tinklo planavimas

Bendroji įvestis

Telekomunikacijų įmonė planuoja statyti antenų tinklą. Kiekviena antena bus įrengta konkrečioje vietoje pagal nustatytas koordinatas. Pastebėta – jeigu trys antenos yra lygiakraščio trikampio viršūnių taškuose, signalai rezonuoja ir trikdo ryšio kokybę. Todėl reikia tikrinti, kad jokia trijų antenų grupė nesudarytų lygiakraščio trikampio.

Užduotys

1 užduotis

Trys antenos yra taškuose, kurių koordinatės: $A(0; 0)$, $B(6; 0)$, $C(3; \sqrt{27})$. Patikrinkite, ar jos sudaro lygiakraštį trikampį.

2 užduotis

Antenos stovi kvadrato viršūnių taškuose. Kiek trikampių galima sudaryti jungiant po tris antenas, jeigu trikampiai laikomi skirtingais, kai skiriasi bent viena antena? Antenų pasirinkimo tvarka nėra svarbi.

3 užduotis

Antenos, esančios taškuose, kurių koordinatės $A(1; 2)$, $B(3; 3)$, $C(4; 1)$, sudaro trikampį. Įrodykite, kad trikampis ABC yra statusis.

4 užduotis

Įrodykite: jei penki taškai, kuriuose yra antenos, išdėstyti taisyklingojo penkiakampio viršūnėse, tai jungiant bet kuriuos tris iš tų taškų atkarpomis, joks tokiu būdu gautas trikampis nebus lygiakraštis.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Apskaičiuojame kraštinių ilgius pagal formulę: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $AB = \sqrt{((6 - 0)^2 + 0^2)} = 6$ $AC = \sqrt{((3 - 0)^2 + (\sqrt{27} - 0)^2)} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = 6$ $BC = \sqrt{((3 - 6)^2 + (\sqrt{27} - 0)^2)} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = 6$ Visos trys kraštinės lygios, vadinasi, antenos sudaro lygiakraštį trikampį. Ats.: taip, antenos sudaro lygiakraštį trikampį.	1	Už teisingai apskaičiuotus visų trijų kraštinių ilgius.
	1	Už teisingą pagrindimą, kad antenos sudaro lygiakraštį trikampį.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Turime 4 taškus. Trikampiai sudaromi renkant po 3 iš 4: $C_4^3 = 4$ Ats.: galima sudaryti 4 skirtingus trikampius.	1	Už teisingai pritaikytą kombinatorikos formulę.
	1	Už teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
1 būdas		
Apskaičiuojame kraštinių ilgius pagal formulę: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $AB = \sqrt{(3 - 1)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$ $BC = \sqrt{(4 - 3)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ $AC = \sqrt{(4 - 1)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$ Tikriname pagal Pitagoro teoremą. Jei trikampis turi statųjį kampą, tai ilgiausios kraštinės kvadratas turi būti lygus dviejų kitų kraštinių kvadratų sumai. Ilgiausia kraštinė: $AC = \sqrt{10}$ Tikriname: $AB^2 + BC^2 = 5 + 5 = 10 = AC^2$ Ats.: trikampis ABC yra statusis, nes tenkina sąlygą.	1	Už teisingai apskaičiuotus visų trijų kraštinių ilgius.
	1	Už teisingai pritaikytą Pitagoro teoremą.
	1	Už padarytą teisingą išvadą.
2 būdas		
Skaičiuojame vektorius:	1	Už teisingai apskaičiuotus vektorius.

$\overrightarrow{BA} = (1 - 3, 2 - 3) = (-2, -1)$ $\overrightarrow{BC} = (4 - 3, 1 - 3) = (1, -2)$		
Vektoriai statmeni, jei skaliarinė sandauga lygi nuliui: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-2)(1) + (-1)(-2) = -2 + 2 = 0$	1	Už teisingai pritaiktą skaliarinės sandaugos apibrėžimą.
Ats.: trikampis ABC yra statusis, nes tenkina sąlygą.	1	Už padarytą teisingą išvadą.
Pastabos		
Galimi ir kiti sprendimo būdai. Pvz.: - Skačiuojami dviejų atkarpų, einančių per tašką, nuolydžiai (krypties koeficientai) ir tikrinama, ar jų sandauga lygi -1. - Skačiuojamas kampas tarp dviejų tiesių. - Tiksliai nubraižoma plokštumoje. Taikant kitus sprendimo būdus, 1 taškas skiriamas už pasirinktą teisingą sprendimo būdą, 1 taškas – už teisingus skaičiavimus ir 1 taškas – už padarytą teisingą išvadą.		

4 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Taisyklingojo penkiakampio kampai lygūs: $(5 - 2) \cdot 180^\circ : 5 = 108^\circ$ ir kraštinės lygios. Trikampius iš penkiakampio viršūnių galima sudaryti dviem pagrindiniais būdais: 1) Jungiant tris gretimas viršūnes (pvz.: A–B–C). Kraštinės AB ir BC sutampa su penkiakampio kraštinėmis. Trečioji kraštinė AC jungia viršūnes, kurias skiria viena viršūnė $\rightarrow$ tai ilgesnė atkarpa (priešais bukąjį kampą). Kadangi kampas tarp AB ir BC yra 108° , ne 60° , tai AC nėra lygi AB ar BC. Gauta figūra – lygiašonis, bet ne lygiakraštis trikampis. 2) Jungiant dvi gretimas viršūnes ir trečiąją, šokant per vieną viršūnę (pvz., A–B–D). Kraštinės AB (trumpa) ir BD bei AD (ilgesnės). Trikampyje yra dvi ilgesnės kraštinės ir viena trumpesnė, vadinasi, trikampis nėra lygiakraštis .	1	Už teisingą samprotavimo seką.
Išvada. Visi kiti variantai yra pirmiau nagrinėti atvejai, todėl joks trikampis iš penkiakampio viršūnių negali būti lygiakraštis . Galimi tik lygiašoniai trikampiai.	1	Už padarytą teisingą išvadą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Kaip apskaičiuoti atstumą tarp dviejų taškų koordinatinių plokštumoje?

2 užuomina. Apskaičiuokite visų trijų trikampio kraštinių ilgius.

3 užuomina. Jei visos kraštinės lygios, vadinasi, trikampis lygiakraštis.

2 užduotis

1 užuomina. Pagalvokite, kiek yra būdų iš 4 taškų pasirinkti po 3?

2 užuomina. Pritaikykite kombinatorikos formulę C_4^3 .

3 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite ir pritaikykite atstumo tarp dviejų taškų formulę.

2 užuomina. Taikykite Pitagoro teoremą – patikrinkite, ar vienos kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai.

4 užduotis

1 užuomina. Pagalvokite, kokiais pagrindiniais būdais galima sudaryti trikampius iš penkiakampio viršūnių.

2 užuomina. Ką reiškia, kad trikampį sudaro trys gretimos penkiakampio viršūnės? Ką reiškia „šokti“ per viršūnę?

3 užuomina. Ką žinote apie kraštinės, kuri yra priešais bukąjį kampą, ilgį?

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Geometrija ir matavimai	Bendras	Tiesės, plokštumos, kampai erdvėje.	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Tiesės, plokštumos, kampai erdvėje.	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
3				Tiesės, plokštumos, kampai erdvėje.	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3
4				Tiesės, plokštumos, kampai erdvėje.	Loginis mąstymas ir įrodymai	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Pagrindinis	2

Šiaudinių sodų geometrija

Bendroji įvestis

Tradiciniai lietuviški sodai – tai iš šiaudų ar kitų augalų stiebų suveriami griežtos geometrinės formos dirbiniai, nuo senų laikų naudojami per šventes ir apeigas, patalpoms puošti, o šiandien – ir kaip meninės instaliacijos. Šiaudiniuose soduose gausu simbolių, susijusių su pasaulio modeliu ir sakralumu. Sodo vertikali ir horizontali struktūra simbolizuoja Pasaulio medį ir darnią visatą, kuri priešinama chaosui. Trikampiai soduose dažnai siejami su dvasia, o kvadratai – su materija. Jų dermė sudaro visumą.



Šioje užduotyje analizuosite įvairius sodo konstrukcijos variantus ir bandysite suprasti, kokie geometriniai principai lemia stabilumą, proporcijas ir grožį.

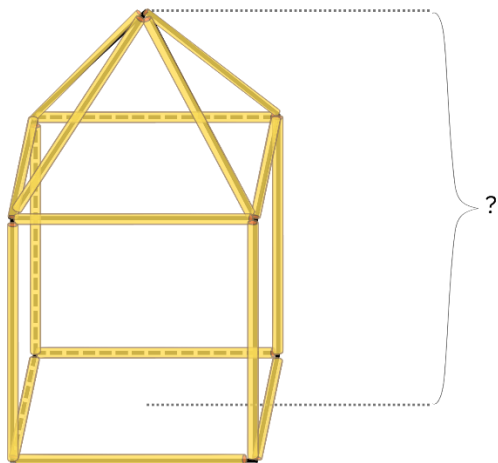
Užduotys

1 užduotis

Kiek šiaudelių reikia, norint sukonstruoti taisyklingą penkiakampę prizmę, jei kiekvienai briaunai naudojamas vienas šiaudelis?

2 užduotis

Sodui pagaminti naudojami šiaudai, kurių ilgis – 5 cm. Iš jų suvertas kubas ir keturkampė piramidė, sujungti bendru pagrindu. Apskaičiuokite bendrą tokios konstrukcijos aukštį. Atsakymą suapvalinkite iki šimtųjų.



3 užduotis

Įsivaizduokite, kad kuriate sodą. Jūs turite 10 cm ilgio šiaudus ir iš jų veriate **taisyklingas daugiakampes piramides**. Kiek daugiausia kampų gali turėti piramidės pagrindas? Atsakymą pagrįskite skaičiavimais.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	1	
Penkiakampė prizmė turi du vienodus penkiakampius pagrindus ir penkias šonines briaunas. Šiaudelių reikia: $5 \text{ (viršuje)} + 5 \text{ (apačioje)} + 5 \text{ (šonuose)} = 15.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Ats.: 15 šiaudelių.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Konstrukcijos (kubas + piramidė) aukštis = kubo aukštis + piramidės aukštis. Kubo aukštis = 5 cm Skačiuojame piramidės aukštį (H): Imame stačiakampį trikampį: - Viena kraštinė – pusė kvadrato kraštinės: $\frac{5}{2} = 2,5 \text{ cm}$ - Kita – ieškomas aukštis H - Įžambinė – šoninė briauna = 5 cm Taikome Pitagoro teoremą: $h = \sqrt{5^2 + 2,5^2} = \sqrt{25 + 6,25} = \sqrt{31,25} \approx 5,59 \text{ cm}$ 5 (kubas) + 5,59 (piramidė) $\approx 10,59 \text{ cm}$ Ats.: bendras konstrukcijos aukštis $\approx 10,59 \text{ cm}$.	1	Už teisingai apskaičiuotą piramidės aukštį.
	1	Už teisingai apskaičiuotą visos konstrukcijos aukštį.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Analizuojame statųjį trikampį, sudarytą iš piramidės šoninės kraštinės, aukštinės ir statinio, jungiančio šias kraštines. Šis statinis sutaps su apibrėžto aplink piramidės pagrindą apskritimo spinduliu R. Aplink taisyklingą n-kampį apibrėžto apskritimo $R = \frac{10}{2 \sin(\frac{\pi}{n})}$ Pagal Pitagoro teoremą: $H = \sqrt{10^2 - R^2}$ Kad piramidė egzistų, reikia, kad: $R < 10$, kitaip šoninė briauna nepasieks pagrindo.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Tikriname įvairius n, kurie tenkina sąlygą. Kai $n = 6$: $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,5 \Rightarrow R = \frac{10}{2 \cdot 0,5} = 10 \Rightarrow h = 0$	1	Už teisingai apskaičiuotą bent vieną n.

Piramidė su n = 6 neturi aukščio ir neegzistuoja kaip erdvinė figūra. Kai $n = 5$: $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 0,588 \Rightarrow r \approx \frac{10}{2 \cdot 0,588} \approx 8,50 \Rightarrow h \approx \sqrt{100 - 72,3} \approx 5,26 \text{ cm}$ Piramidė su n = 5 egzistuoja. Kai $n = 7$: $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \approx 0,433 \Rightarrow r \approx \frac{10}{2 \cdot 0,433} \approx 11,5 > 10 \Rightarrow$ sąlyga netenkinama, figūra neįmanoma Piramidė su n = 7 neegzistuoja.		
Ats.: maksimalus daugiakampės piramidės pagrindo kampų skaičius yra 5.	1	<i>Už padarytą teisingą išvadą.</i>
Pastabos		
<i>Jei sprendžiama kitu būdu, 1 taškas skiriamas už pasirinktą teisingą sprendimo būdą, 1 taškas – už teisingus skaičiavimus ir 1 taškas – už padarytą teisingą išvadą.</i>		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Kiek kraštinių turi vienas penkiakampis?

2 užuomina. Prizmė turi **du tokius penkiakampius** – vieną viršuje ir vieną apačioje.

3 užuomina. Nepamirškite, kad visas viršūnių poras (viršutinę ir apatinę) jungia **šoninė briauna**. Kiek yra tokių jungčių?

2 užduotis

1 užuomina. Kokį trikampį sudaro piramidės aukštinė, pusė pagrindo kraštinės ir šoninė briauna?

2 užuomina. Pritaikykite Pitagoro teoremą ir apskaičiuokite trikampio aukštį.

3 užuomina. Sudėkite kubo ir piramidės aukščius.

3 užduotis

1 užuomina. Aplink taisyklingą daugiakampį galima apibrėžti apskritimą. Kokia jo spindulio formulė?

2 užuomina. Kada šoninė briauna vis dar pasiekia pagrindą? Kokia sąlyga turi būti tenkinama?

3 užuomina. Išbandykite kelias n reikšmes (pagrindo kampų skaičių).

4 užuomina. Kuri didžiausia n reikšmė tenkina sąlygą?

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Geometrija ir matavimai	Bendras	Briauniniai, sukiniai.	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas (B)	AMG	Slenkstinis	1
2				Briauniniai, sukiniai.	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas (B)	AMG	Pagrindinis	2
3				Briauniniai, sukiniai.	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Gilus supratimas ir argumentavimas (A)	AMG	Pagrindinis	3

Tortas iš kepyklėlės

Bendroji įvestis

Kepyklėlė „Skanaus“ gamina ritinio formos 20 cm skersmens ir 8 cm aukščio tortus. Vienas tortas sveria 2 kg. Tortai pjaustomi vertikaliai vienodo dydžio gabalėliais nuo centro link krašto taip, kad žiūrint iš viršaus kiekvienas gabalėlis atrodytų kaip skritulio išpjova, kurios centrinis kampas lygus 45° .

Užduotys

1 užduotis

Uogienės sluoksnis tarp biskvitų sudaro 5 % visos torto masės. Kepyklėlė turi tik 100 g uogienės. Ar šio kiekio pakaks vienam tortui? Pagrįskite savo atsakymą.

2 užduotis

Koks yra vieno torto gabalėlio svoris, jei visas tortas sveria 2 kg? Pateikite sprendimą.

3 užduotis

Koks turi būti torto gabalėlio, primenančio išpjovą, centrinis kampas, kad gabalėlis svertų 150 g? Pateikite sprendimą.

4 užduotis

Produktų kaina padidėjo 10 %, tačiau kepyklėlė nenori tiek procentų pakelti savo gaminių kainos. Nuspręsta pusę šio kainos padidėjimo padengti didinant atnaujinto torto kainą – kaina klientui kils tik 5 %. Kita padidėjusių sąnaudų dalis bus padengta mažinant bendrą torto svorį. Kiek gramų turi sverti atnaujinto torto gabalėlis (su tam tikru centriniu kampu), jei prieš tai buvęs svėrė x g?

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
Torto masė: 2 kg = 2000 g. Uogienė sudaro 5 % torto masės. Reikalingas uogienės kiekis = $0,05 \cdot 2000 = 100$ g. Ats.: taip, uogienės pakaks tiksliai vienam tortui.	1	Už teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Visas tortas – 360°. Gabalėlio kampas – 45°. Visa masė – 2 kg = 2000 g. $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$, todėl $2000 \cdot \frac{1}{8} = 250$ g.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo strategiją.
Ats.: vienas gabalėlis sveria 250 g .	1	Už teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Visa masė – 2000 g atitinka 360°. Ieškomas kampas x, kad gabalėlis svertų 150 g. $\frac{x}{360} \cdot 2000 = 150 \rightarrow x = \frac{150 \cdot 360}{2000} = \frac{54000}{2000} = 27^\circ$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo strategiją.
Ats.: kad gabalėlis svertų 150 g, jo centrinis kampas turi būti 27° .	1	Už teisingą atsakymą.

4 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Pradinė kaina – 100 %. Po produktų kainos padidėjimo gaminio kaina tampa 110 %. Kaina klientui padidėja tik 5 %, t. y. padengiama 105 %. Trūksta padengti: $\frac{110-105}{110} = \frac{5}{110} = \frac{1}{22} \approx 0,0455 \approx 4,55 \%$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo strategiją.

Tai reiškia – gabalėlio masė turi sumažėti $\frac{1}{22}$, kad likusi dalis būtų padengta mažesnėmis sąnaudomis. Atnaujinto gabalėlio svoris: $x \cdot \left(1 - \frac{1}{22}\right) = x \cdot \frac{21}{22}.$		
Ats.: atnaujintas gabalėlis turi sverti $\frac{21}{22} \cdot x$ arba $\approx 4,55\%$ mažiau.	1	<i>Už teisingą atsakymą.</i>

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kokia torto masės dalis tenka uogienei.

2 užuomina. Paverskite torto masę į gramus.

3 užuomina. Apskaičiuokite, kiek gramų sudaro 5 % torto masės.

2 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite, kiek laipsnių turi visas apskritimo lankas.

2 užuomina. Kiek kartų 45° telpa į 360° ?

3 užuomina. Apskaičiuokite, kokią dalį torto sudaro vienas gabalėlis. Pritaikykite šią dalį 2000 g masei.

3 užduotis

1 užuomina. Sudarykite proporciją tarp kampo dydžio ir torto gabalėlio svorio.

2 užuomina. Nepamirškite, kad visas tortas – 360° , o visa masė – 2000 g.

4 užduotis

1 užuomina. Kokia dalis liko nepadengta? Kokia tai dalis nuo visos naujos kainos?

2 užuomina. Kokią visos kainos dalį sudaro ši likusi nepadengta dalis?

3 užuomina. Raskite, kiek turi sumažėti porcijos svoris (t. y. kokią prieš tai buvusio svorio dalį sudarys atnaujinto torto svoris).

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Geometrija ir matavimai	Bendras	Briaunainiai, sukiniai.	Matematinis samprotavimas	Problemų sprendimas	AMG	Slenkstinis	1
2				Briaunainiai, sukiniai.	Matematinis samprotavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
3				Briaunainiai, sukiniai.	Matematinis modeliavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	2
4				Briaunainiai, sukiniai.	Matematinis modeliavimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	2

IV GIMANZIJOŠ KLASĖ, BENDRASIS KURSAS, DUOMENYS IR TIKIMYBĖS

Monetos metimai

Bendroji įvestis

Imama įprasta moneta, turinti dvi puses. Tikimybė, kad atsivers skaičius, yra $1/2$, tikimybė, kad atsivers herbas – taip pat $1/2$.

Tokios monetos metimas – klasikinis tikimybinis bandymas, nes visų baigčių tikimybės vienodos.



Šaltinis: Shutterstock, ID:424738894.

Užduotys

1 užduotis

Moneta metama 2 kartus. Nustatykite, kuo galėjo baigtis metimai – kiek kartų galėjo iškristi herbas? Apskaičiuokite kiekvieno iš šių įvykių tikimybę.

2 užduotis

Apskaičiuokite, kokia yra tikimybė, kad monetą metant 3 kartus herbas iškris lygiai 1 kartą.

Taip pat apskaičiuokite, kokia yra tikimybė išmesti herbą lygiai 2 kartus, monetą metant 6 kartus.

Palyginkite, kuri tikimybė didesnė. Pagal tai spėkite: jeigu tęstumėte ir skaičiuotumėte tikimybę išmesti herbą 3 kartus iš 9 metimų ir t. t., kokią tikimybę seką gautumėte – mažėjančią ar didėjančią?

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Metant monetą 2 kartus, galimi tokie įvykiai: - Herbas iškrito 0 kartų - Herbas iškrito 1 kartą - Herbas iškrito 2 kartus	1	Už gautą teisingą baigčių aibę, kai moneta metama 2 kartus.
Herbas iškrito 0 kartų viename iš 4 galimų rinkinių, todėl tikimybė, kad herbas iškrito 0 kartų: $\frac{1}{4}$.	1	Už gautą teisingą tikimybę.
Herbas iškrito 1 kartą dviejuose iš keturių galimų rinkinių, todėl tikimybė, kad herbas iškrito 1 kartą: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.	1	Už gautą teisingą tikimybę.
Herbas iškrito 2 kartus viename iš keturių galimų rinkinių, todėl tikimybė, kad herbas iškrito 2 kartus: $\frac{1}{4}$.	1	Už gautą teisingą tikimybę.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
Pirmuoju atveju, kadangi turime 3 metimų rinkinį, kur kiekvieno metimo baigtis yra viena iš dviejų galimų, iš viso turime $2^3 = 8$ baigtis.	1	Už teisingą apskaičiavimą, kiek skirtingų rinkinių galima sudaryti monetą metant 3 kartus.
Trim atvejais herbas atvirsta 1 kartą, todėl: $P(1 \text{ herbas iš } 3 \text{ metimų}) = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$.	1	Už teisingą apskaičiavimą, kokia tikimybė, kad herbas iškris lygiai 1 kartą monetą metant 3 kartus.
Antruoju atveju, kadangi turime 6 metimų rinkinį, kur kiekvieno metimo baigtis yra viena iš dviejų galimų, iš viso turime $2^6 = 64$ baigtis.	1	Už teisingą apskaičiavimą, kiek skirtingų rinkinių galima sudaryti monetą metant 6 kartus.
Norint nustatyti, kaip pasiskirstys du iškritusio herbo atvejai esant skirtingiems 6 galimiems įvykiams: $\frac{6 \cdot 5}{2}$. Todėl: $P(2 \text{ herbai iš } 6 \text{ metimų}) = \frac{\frac{6 \cdot 5}{2}}{2^6} = \frac{15}{64}$.	1	Už teisingą apskaičiavimą, kokia tikimybė, kad herbas iškris lygiai 2 kartus monetą metant 6 kartus.

$P(1 \text{ h. iš } 3 \text{ met.}) > P(2 \text{ h. iš } 6 \text{ met.})$, todėl tikimybių seka būtų mažėjanti / nedidėjanti.	1	Už teisingą atsakymą (teisingai užrašyta nelygybė ir įvardyta, kad seka yra mažėjanti / nedidėjanti).
--	---	---

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Jei monetą metate 2 kartus ir gali atvirsti arba skaičius, arba herbas, tuomet kokie galimi 4 rezultatai?

2 užuomina. Suskaičiuokite, kiek kartų kiekvienu atveju atsivertė herbas. Pagal tai nustatykite tikimybę esant kiekvienam iš šių įvykių (skirtingas atsivertusio herbo skaičius).

2 užduotis

1 užuomina. Pažvelkite į užduotį kombinatoriškai – jeigu monetą metate 3 kartus, tuomet yra $2^3 = 8$ baigtys. Kokios kombinacijos galėjo susidaryti? Kuriais atvejais iškrito lygiai 1 herbas? Pagal tai apskaičiuokite įvykio tikimybę.

2 užuomina. Jeigu monetą metate 6 kartus, tuomet yra $2^6 = 64$ baigtys. Kokios kombinacijos galėjo susidaryti? Kiek yra būdų 2 iškritusio herbo atvejus paskirstyti 6 galimiems įvykiams, jeigu išdėliojimo tvarka nėra svarbi? Pagal tai apskaičiuokite įvykio tikimybę.

3 užuomina. Palyginkite abi apskaičiuotas tikimybes. Kuri iš jų mažesnė? Pagal tai spėkite, ar tikimybė $P(3 \text{ herbai iš } 9 \text{ metimų})$ būtų mažesnė, ar didesnė.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrūpis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Duomenys ir tikimybės	Bendrasis	Tikimybės ir jų interpretavimas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	4
2				Tikimybės ir jų interpretavimas	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	5

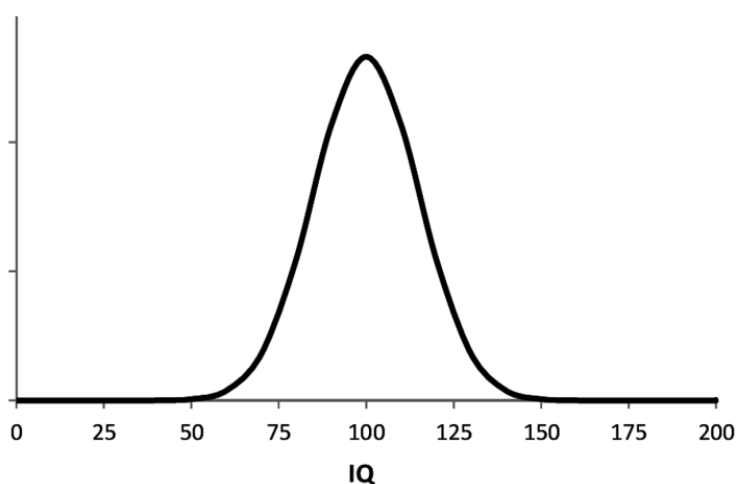
IQ testas

Bendroji įvestis

Pasaulyje yra sukurta įvairių priemonių žmogaus intelektui įvertinti. Viena jų – intelekto koeficiento (IQ) testas.

Paprastai tokį testą sudaro daugybė įvairių užduočių. Pagal tai, kaip pavyksta jas išspręsti, žmogaus intelektas įvertinamas skaičiumi, kuris vadinamas intelekto koeficientu.

Kartais žmonių IQ visuma supaprastintai vaizduojama tokiu grafiku. Jame kreivės aukštis žymi populiacijos dalį, turinčią atitinkamą IQ (vaizduojamas abscisių ašyje).



Grafikas atspindi, kad daugumos žmonių IQ yra artimas skaičiui 100, o tolstant nuo šios reikšmės į vieną ir į kitą pusę, žmonių, turinčių atitinkamą IQ, yra vis mažiau.

Užduotys

1 užduotis

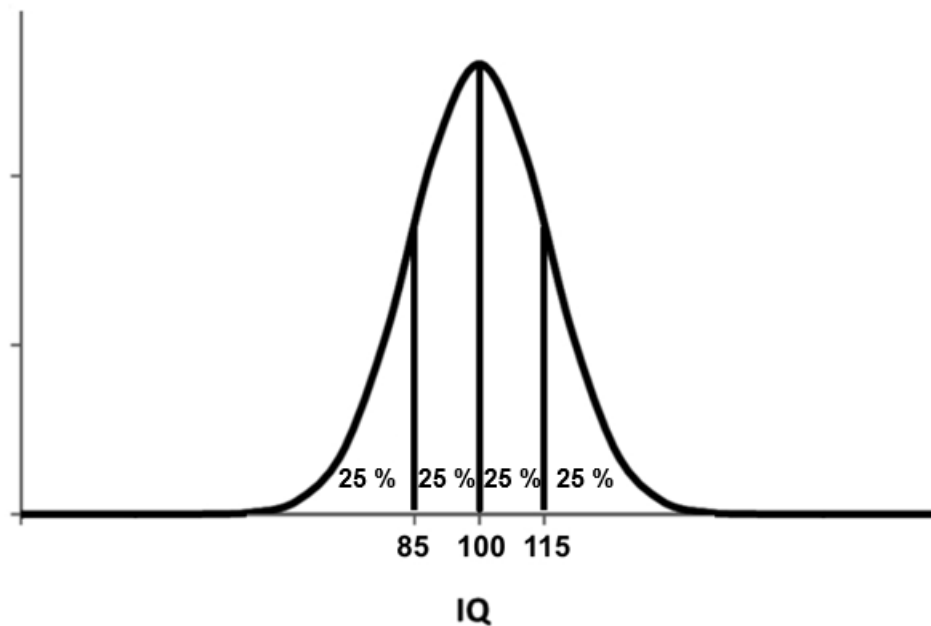
Mokykloje visiems mokiniams atlikus IQ testą buvo apskaičiuoti testo rezultatai. Paaiškėjo, kad surinkti taškai pasiskirstė taip:

25 % mokinių IQ koeficientai pateko į intervalą $[0, 85)$,

25 % mokinių IQ koeficientai pateko į intervalą $[85, 100)$,

25 % mokinių IQ koeficientai pateko į intervalą $[100, 115)$,

25 % mokinių IQ koeficientai buvo 115 arba didesni.



Kokia tikimybė, kad, atsitiktinai parinkus vieną iš mokyklos mokinių, jo IQ pateks į intervalą $[0, 115)$?
 Kokia tikimybė, kad mokinio IQ į šį intervalą nepateks?

2 užduotis

Klasėje yra 5 mergaitės ir 5 berniukai. Visi 10 klasės moksleivių atliko IQ testą. Toliau esančioje lentelėje pateikiami jų IQ testo rezultatai.

Mergaitės	Berniukai
85	99
105	86
110	111
95	88
105	116

Pasinaudokite lentelėje pateiktais duomenimis ir apskaičiuokite, kurios grupės IQ rezultatų vidurkis šioje klasėje aukštesnis – mergaičių ar berniukų?

Ar remiantis apskaičiuotais duomenimis galima daryti patikimą išvadą apie tai, kam lygūs visos žmonijos mergaičių ir berniukų IQ vidurkiai? Atsakymą argumentuokite.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Tikimybė, kad IQ patenka į intervalą [0,115): 25 % + 25 % + 25 % = 75 % (arba 0,75).	1	Už teisingai apskaičiuotą tikimybę.
Tikimybė, kad IQ nepatenka į intervalą [0,115): 25 % (arba 0,25).	1	Už teisingai apskaičiuotą tikimybę.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Mergaičių IQ vidurkis: $\frac{85 + 105 + 110 + 95 + 105}{5} = 100$	1	Už teisingai apskaičiuotą mergaičių IQ vidurkį.
Berniukų IQ vidurkis: $\frac{99 + 86 + 111 + 88 + 116}{5} = 100$	1	Už teisingai apskaičiuotą berniukų IQ vidurkį.
Klasės mergaičių ir berniukų IQ vidurkiai sutampa.	1	Už padarytą teisingą išvadą apie vidurkius.
Iš šių duomenų negalime daryti pagrįstos išvados apie visos žmonijos mergaičių ir berniukų IQ vidurkius, nes ištirta per maža žmonijos dalis.	1	Už padarytą teisingą išvadą apie tai, kad iš šių duomenų daryti išvados apie visą populiaciją negalima.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Kokią dalį sąlygoje pateiktos informacijos apima intervalas $[0, 115)$? Ar galėtumėte šį intervalą sudėti iš sąlygoje pateiktų intervalų?

2 užuomina. Jei apjungsime tris iš keturių sąlygoje pateiktų intervalų, kokią dalį visų rezultatų sudarys šiuose trijuose intervaluose esantys rezultatai? Kokia dalis lieka ketvirtajame intervale?

2 užduotis

1 užuomina. Atskirai apskaičiuokite mergaičių rezultatų vidurkį ir berniukų rezultatų vidurkį. Palyginkite – kuris iš jų didesnis?

2 užuomina. Ar pagal šios klasės moksleivių IQ rezultatus galite spręsti apie visos žmonijos IQ testo rezultatus? Pagalvokite, kodėl toks tyrimas būtų nepakankamas. Įvertinkite tirtos grupės dydį, palyginti su visos žmonijos populiacijos dydžiu.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Duomenys ir tikimybės	Bendrasis	Tikimybės ir jų interpretavimas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Įvadas į statistinę duomenų analizę	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Pagrindinis	4

Mokyklos renginys lauke

Bendroji įvestis

Mokinių savivaldos atstovai ir atstovės planuoja balandžio mėnesį organizuoti renginį lauke. Jie turi atsižvelgti į orų prognozes ir nuspręsti, ar verta rizikuoti organizuojant veiklą lauke. Balandį Lietuvoje orai dažnai būna gana nepastovūs: pasitaiko ir šiltų, saulėtų dienų, ir lietaus, kartais net sniego. Meteorologai pateikė tokias prognozes: tikimybė, kad bet kuri fiksuota diena balandį bus lietinga, yra 40 %, kad visa diena bus saulėta – 50 %, o likusius 10 % sudaro tikimybė, kad iki pietų nelis, o po pietų pradės lyti. Atsitiktiniai įvykiai, kad nelis dviem skirtingomis mėnesio dienomis iki pietų, yra nepriklausomieji.

Užduotys

1 užduotis

Jei renginys vyks pirmoje dienos pusėje, kokia tikimybė, kad jo metu nelis?

2 užduotis

Mokiniai nusprendė organizuoti dviejų dienų renginį lauke. Kokia tikimybė, kad abi dienos bus tinkamos renginiui, jeigu abi dienas jis vyks pirmoje dienos pusėje?

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Tikimybė, kad renginys vyks be trikdžių, lygi saulėtos arba mišrios dienos tikimybei: $P(\text{saulėta arba mišri}) = P(\text{saulėta}) + P(\text{mišri}).$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą ir gautą teisingą atsakymą.
Apskaičiuojame atsakymą: $P(\text{saulėta}) + P(\text{mišri}) = 0,5 + 0,1 = 0,6.$ Ats.: 0,6.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Tikimybė, kad viena diena bus tinkama renginiui, t. y. bus saulėta arba mišri diena, lygi tikimybių sumai, nes įvykiai nesutaikomieji: $P(\text{diena tinkama renginiui}) = P(\text{saulėta}) + P(\text{mišri}) = 0,5 + 0,1 = 0,6.$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą ir gautą teisingą atsakymą.
Tikimybė, kad abi dienos bus tinkamos renginiui, lygi tikimybių sandaugai, nes įvykiai nepriklausomieji: $P(\text{abi dienos tinkamos}) = P(\text{tinkama diena}) \cdot P(\text{tinkama diena}) = 0,36.$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą ir gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Renginys gali vykti ir mišrią dieną, kol lietus neprasidėjo. Tad tinka ir visos dienos, kada nelyja iki pietų.

2 užuomina. Prisiminkite, kad esant sąlygai „arba“ (saulėta **arba** mišri diena), reikia sudėti šių įvykių tikimybes, nes įvykiai yra nesutaikomieji.

2 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite kiekvienos dienos tikimybę atskirai.

2 užuomina. Prisiminkite, kad esant sąlygai „ir“ (pirma **ir** antra diena), reikia sudauginti šių įvykių tikimybes, jei įvykiai yra nepriklausomieji.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis		Tema	MS gebėjimų pogrūpis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Duomenys ir tikimybės	Bendrasis	Tikimybės ir jų interpretavimas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Tikimybės ir jų interpretavimas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	2

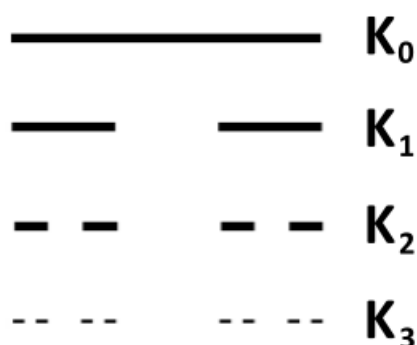
IV GIMANZIJOS KLASĖ, IŠPLĖSTINIS KURSAS, MODELIAI IR SĄRYŠIAI

Kantoro dulkės 2

Bendroji įvestis

Susipažinkite su viena iš įdomių matematinių sekų – Kantoro dulkėmis. Šią seką galima sudaryti įvairiais būdais, pavyzdžiui, iš atkarpos.

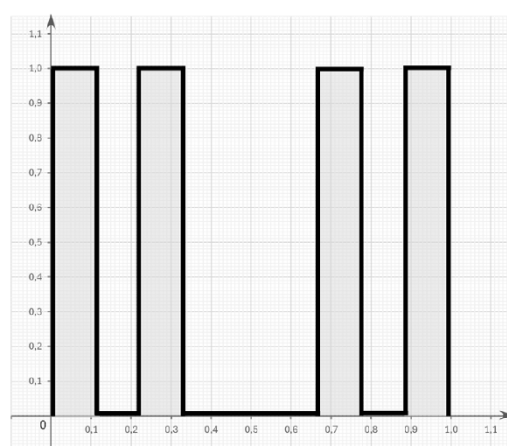
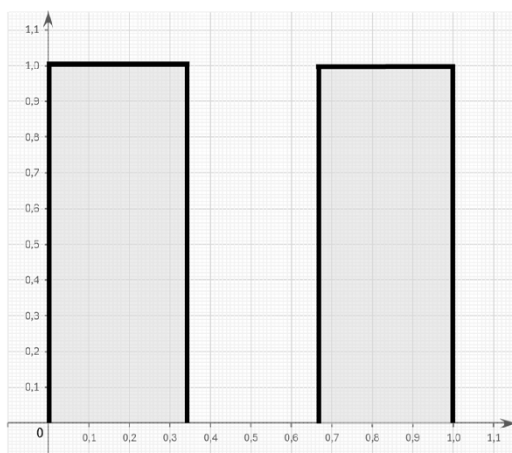
Turime atkarpą, kurios ilgis – L . Iš pradžių jos ilgį padaliname į tris lygias dalis, iškerpame vidurinę dalį ir gauname dvi mažesnes atkarpėles. Kiekvienu tolesniu žingsniu pakartojame tą patį su kiekviena iš anksčiau gautų atkarpų. Pirmi keli šio proceso žingsniai pavaizduoti paveiksle. Čia K_n – likusi atkarpos dalis po n žingsnių.



Užduotys

1 užduotis

Iš Kantoro dulkių konstruojame dvimates figūras. Jų ilgis – Kantoro dulkių atkarpų ilgis, o aukštis lygus 1 ten, kur dulkių yra, ir lygus 0 ten, kur dulkių nėra. Iš K_1 ir K_2 atkarpų gaunamos figūros pavaizduotos koordinatinių plokštumose:

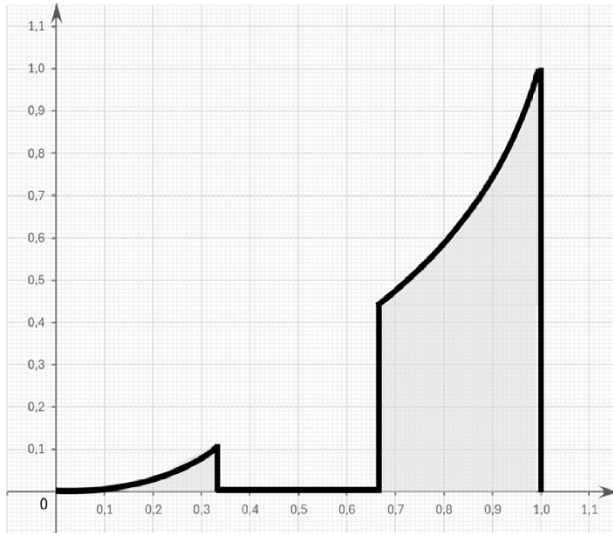


Apskaičiuokite, kam lygūs kreivių sudarytų nuspaltintų figūrų plotai, jei pradinės atkarpos ilgis $L = 1$, ir ji eina nuo taško $(0; 0)$ iki taško $(1; 0)$.

2 užduotis

Iš Kantoro dulkių konstruojame dvimates figūras tuo pačiu būdu kaip ir 1 užduotyje, tačiau pakeičiame figūros aukštį. Ten, kur aukštis buvo 1, pakeičiame jį į $f(x) = x^2$.

Apskaičiuokite, kam lygus plotas figūros, sudarytos iš K_1 , jeigu jos aukštis yra ne 1, o funkcija $f(x) = x^2$. Pradinis atkarpos ilgis $L = 1$, ir ji eina nuo taško $(0; 0)$ iki taško $(1; 0)$.



3 užduotis

Iš Kantoro dulkių konstruojame dvimates figūras taip, kaip ir ankstesnėse užduotyse, tačiau šįkart aukštis yra ne 1, o funkcija $h(x)$.

Žinoma, kad funkcijos $h(x)$ pirmąją funkcija yra:

$$\int h(x)dx = \lg(x + 1) + C$$

Apskaičiuokite, kam lygus plotas figūros, sudarytos iš K_2 , jeigu jos aukštis yra funkcija $h(x)$. Pradinis atkarpos ilgis $L = 9$, ir atkarpos galai yra taškuose $(0; 0)$ ir $(9; 0)$. Pateikite tikslų atsakymą (pritaikykite logaritmų savybes ir sutraukite iki vieno logaritmo).

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Plotas figūros, sudarytos iš K_1 , lygus: $S = \frac{2}{3}$.	1	Už teisingą atsakymą.
Plotas figūros, sudarytos iš K_2 , lygus: $S = \frac{4}{9}$.	1	Už teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Funkcijos $f(x) = x^2$ pirmąją funkcija yra $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.	1	Už teisingai apskaičiuotą funkcijos x^2 pirmąją funkciją.
Taigi K_1 plotą galima rasti taikant Niutono ir Leibnico formulę intervale $x \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$: $\int_{K_1} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _0^{\frac{1}{3}} + \frac{x^3}{3} \Big _{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} - \frac{0^3}{3} + \frac{1^3}{3} - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{3}$.	1	Už teisingai pritaiktą Niutono ir Leibnico savybę funkcijos x^2 integralui.
Apskaičiuojame ir gauname: $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} - \frac{0^3}{3} + \frac{1^3}{3} - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{3} = \frac{1}{81} + \frac{1}{3} - \frac{8}{81} = \frac{20}{81}$. Ats.: $\frac{20}{81}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
K_2 susideda iš keturių dalių, kiekvienai iš jų galime pritaikyti Niutono ir Leibnico formulę. Gausime, kad pirmosios dalies plotas lygus: $\lg(1+1) - \lg(0+1)$. Antrosios dalies plotas lygus: $\lg(3+1) - \lg(2+1)$. Trečiosios dalies plotas lygus: $\lg(7+1) - \lg(6+1)$. Ketvirtosios dalies plotas lygus: $\lg(9+1) - \lg(8+1)$.	2	Už teisingai pritaiktą Niutono ir Leibnico formulę plotui po funkcija $h(x)$ apskaičiuoti. (Jei apskaičiuojamas tik vienos figūros plotas – skiriamas 1 taškas. Jei apskaičiuojamas visų keturių figūrų plotas – skiriami 2 taškai.)
Sudedame šiuos plotus, pritaikome logaritmų su vienodu pagrindu sudėties savybę ir gauname: $\lg\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}\right) = \lg \frac{256}{63}$. Ats.: plotas lygus $\lg \frac{256}{63}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad figūros sudarytos iš stačiakampių. Pagalvokite – kokie šių stačiakampių matmenys?

2 užuomina. Kadangi visų figūrų aukštis lygus 1, galite sudėti Kantoro dulkių ilgius ir gausite atsakymą.

2 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite laipsninių funkcijų integravimą – kokia yra funkcijos x^2 pirmykštė funkcija?

2 užuomina. Kuriuose intervaluose reikia nagrinėti funkcijos integralą? Kiekvienam intervalui pritaikykite Niutono ir Leibnico formulę.

3 užduotis

1 užuomina. Iš kelių dalių susideda figūra? Kokiame intervale pagal x yra kiekviena figūra?

2 užuomina. Pritaikius Niutono ir Leibnico taisyklę, kiekvienos figūros dalies plotas išreiškiamas dviejų narių skirtumu. Atkreipkite dėmesį, kad sąlygoje pateikta funkcijos $h(x)$ pirmykštė funkcija. Pritaikykite Niutono ir Leibnico taisyklę kiekvienai iš keturių figūros dalių ir kiekvienos jų plotą išreikškite kaip dviejų narių skirtumą.

3 užuomina. Pagal sąlygoje duotą funkciją raskite išraišką, kam lygus plotas figūros, sudarytos iš K_2 , ir kurios aukštis lygus $h(x)$. Suprastinkite šią išraišką – pritaikykite logaritmų su vienodu pagrindu sudėties ir atimties savybes.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Modeliai ir sąryšiai	Išplėstinis	Pirmykštė funkcija ir integralas	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Pirmykštė funkcija ir integralas	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3
3				Pirmykštė funkcija ir integralas	Matematinis komunikavimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	3

Dažų skiedimo metodas

Bendroji įvestis

Vienas iš būdų tirti žmogaus širdies darbą – įleisti į kraują dažomosios medžiagos. Tai suteikia galimybę stebėti kraujotakos organus ir sužinoti, per kiek laiko dažai apsuka pilną kraujotakos ratą.

Tačiau keliaudami dažai smarkiai išsisklaido, todėl darosi sunku nustatyti, kada tiksliai dažų visuma būna apėjusi ratą. Šią problemą galima išspręsti taikant apibrėžtinį integralą.

Tarkime, vienoje žmogaus kūno vietoje jutikliu fiksuojame dažų koncentraciją kraujyje gramais litre. Tegul praėjus t sekundžių nuo matavimo pradžios dažų koncentracija lygi $c(t)$. Jei žinome, kam lygi ši koncentracija, galime nustatyti širdies pernešamo kraujo kiekį.

Užduotys

1 užduotis

Į kraują įlašiname M gramų dažų. Tam tikrą laiką stebėjome koncentraciją ir suintegravome ją pagal laiką. Gautą integravimo rezultatą pažymėkime I . Jo matavimo vienetai yra $s \cdot g/L$ (čia s – sekundės, g – gramai, L – litrai).

Nustatykite, kokie yra dydžio V matavimo vienetai, kai šis dydis užrašomas

$$V = \frac{M}{I}.$$

2 užduotis

Į kraują įlašiname $M = 6$ g dažomosios medžiagos. Tada toje vietoje penkias sekundes fiksavome dažų koncentraciją. Gavome, kad dažų koncentracija lygi funkcijai $f(t) = 8 \cdot t - t^2$ (kai $t \in [0, 5]$).

Apskaičiuokite $I = \int_0^5 f(t) dt$.

Pagal gautą rezultatą ir formulę $V = \frac{M}{I}$ apskaičiuokite V (širdies pernešamą kraujo kiekį per sekundę). Pagal tai apskaičiuokite, kiek kraujo širdis perneša per minutę. Atsakymą pateikite vieno skaitmens po kablelio tikslumu.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
$V = \frac{M}{I} = \frac{g}{s \cdot \frac{g}{L}}$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą į V formulę teisingai įsistatyti M ir I matavimo vienetus.
$\frac{g}{s \cdot \frac{g}{L}} = \frac{1}{s} = \frac{L}{s}$ (litrai per sekundę).	1	Už gautą teisingą atsakymą (matavimo vienetus).

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
$\int_0^5 (8t - t^2) dt = \left(4t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \Big _0^5$	1	Už teisingai nustatytą funkcijos f(t) pirmąją funkciją.
$\left(4t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \Big _0^5 = 4 \cdot 5^2 - \frac{5^3}{3} = \frac{175}{3}$	1	Už teisingai apskaičiuotą integralo reikšmę.
$V = \frac{6}{\frac{175}{3}} = \frac{18}{175} \text{ (L/s)}$	1	Už teisingai apskaičiuotą V reikšmę litrais per sekundę.
Per minutę širdis perneša kraujo: $60 \cdot \frac{18}{175} = \frac{216}{33} \approx 6,2 \text{ (L/min.)}$	1	Už teisingai apskaičiuotą V reikšmę litrais per minutę.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Formulėje $V = \frac{M}{I}$ vietoje M ir I įsistatykite šių dydžių matavimo vienetus.

2 užuomina. Kai įsistatysite M ir I , nustatykite, kokius dydžius gautame reiškinyje galima suprastinti. Gautą rezultatą pateikite kuo paprastesne išraiška.

2 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite laipsninių funkcijų integravimo taisyklę. Jei suintegruosite funkciją $f(t) = 8 \cdot t - t^2$, ką gausite?

2 užuomina. Apskaičiuokite pirmąją funkciją ir pritaikykite jai Niutono-Leibnico formulę (apskaičiuokite pirmąsios funkcijos reikšmių skirtumą su $t = 5$ ir $t = 0$).

3 užuomina. Apskaičiuotą integralo reikšmę įsistatykite (vietoje I) į formulę $V = \frac{M}{I}$. Taip rasite pernešamo kraujo kiekį per sekundę.

4 užuomina. Iš kokio skaičiaus reikėtų padauginti apskaičiuotą V dydį (litrais per sekundę), kad gautumėte pernešamo kraujo kiekį litrais per minutę?

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrūpis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Modeliai ir sąryšiai	Išplėstinis	Pirmykštė funkcija ir integralas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	2
2				Pirmykštė funkcija ir integralas	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	4

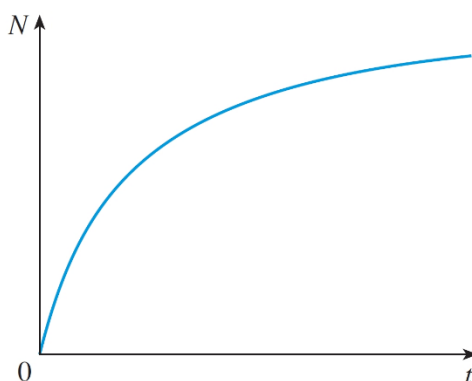
Gėlių nektaras

Bendroji įvestis

Bitės nektarą renka iš mažų nektaro telkinių gėlių žieduose.

Panagrinėkime vieną bitės nutūpimą ant gėlės žiedo. Iš pradžių bitė surenka nektarą iš didesnių nektaro telkinių, po to imasi mažesnių. Taigi, jei nagrinėtume bitės surinkto nektaro kiekį per laiką, iš pradžių surinkto nektaro kiekis augtų greičiau, po to lėčiau.

Supaprastintai nektaro kiekį N per laiką t galima pavaizduoti grafiku:



Tarkime, kad bitės surinkto nektaro (miligramais) per t sekundžių funkcija $N(t)$ užrašoma taip:

$$N(t) = \frac{t}{t + 4}.$$

Užduotys

1 užduotis

Įrodykite, kad funkcijos $N(t)$ išvestinė yra teigiama, kai $t > 0$.

2 užduotis

Bitei nuskristi nuo vieno žiedo iki kito užtrunka 4 sekundes, o ant kiekvieno žiedo ji praleidžia po x sekundžių.

Užrašykite funkciją $f(x)$, pagal kurią būtų galima apskaičiuoti vidutinį bitės surenkamo nektaro kiekį (miligramais per sekundę) nuo nutūpimo ant vieno žiedo iki nutūpimo ant kito.

Kiek laiko bitė turėtų praleisti ant vieno žiedo, kad pasiektų maksimalų vidutinį nektaro surinkimo kiekį per sekundę?

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Funkcijos $N(t)$ išvestinė: $N'(t) = \frac{t' \cdot (t+4) - t \cdot (t+4)'}{(t+4)^2}.$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą pritaikyti dviejų funkcijų dalybos išvestinės taisyklę.
$N'(t) = \frac{4}{(t+4)^2} > 0, \text{ nes } t > 0.$	1	Už gautą teisingą atsakymą (parodyta, kad išvestinė teigiama).

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
Surinktą nektaro kiekį padalijame iš rinkimo laiko ir gauname vidutinį per vieną skrydį surenkamo nektaro kiekį: $f(x) = \frac{N(x)}{x+4} = \frac{x}{(x+4)^2}.$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą nustatyti vidutinį per vieną skrydį surenkamo nektaro kiekį.
$f'(x) = \frac{x' \cdot (x+4)^2 - x \cdot ((x+4)^2)'}{(x+4)^4} = \frac{16-x^2}{(x+4)^4}.$	1	Už teisingai apskaičiuotą ir sutrauktą $f(x)$ išvestinę.
$f'(x) = 0, \text{ kai } 16 - x^2 = 0, (x+4)^2 \neq 0.$	1	Už teisingą nustatymą, kokioms sąlygoms esant išvestinė lygi nuliui.
$f'(x) = 0, \text{ kai } x = 4.$	1	Už teisingą nustatymą, su kokia x reiškme išvestinė lygi nuliui.
$f'(x) > 0, \text{ kai } x \in (0; 4),$ $f'(x) < 0, \text{ kai } x \in (4; +\infty),$ todėl $x = 4$ yra maksimumo taškas.	1	Už teisingą nustatymą, kad $x = 4$ yra maksimumo taškas.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Pritaikykite dviejų funkcijų dalybos išvestinės taisyklę ir apskaičiuokite $N(t)$ išvestinę.

2 užuomina. Sutraukite panašiuosius narius ir nustatykite, ar gautas rezultatas yra teigiamas, kai $t > 0$?

2 užduotis

1 užuomina. Norint rasti vidutinį surinkto nektaro kiekį per tam tikrą laiką, reikia surinkto nektaro kiekį padalyti iš praėjusio laiko.

2 užuomina. Žinome, kad surinkto nektaro kiekis žymimas N . Tuomet kam lygus laikas, praėjęs nuo nutūpimo ant vieno žiedo iki kito žiedo, jeigu bitė praleidžia x sekundžių ant žiedo ir 4 sekundes skrisdama? Padalykite $N(x)$ iš šio dydžio. Taip gausite $f(x)$.

3 užuomina. Apskaičiuokite gautos funkcijos $f(x)$ išvestinę ir nustatykite, su kokia x reikšme ji lygi nuliui.

4 užuomina. Nustatykite, ar gauta x reikšmė yra maksimumo taškas.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Modeliai ir sąryšiai	Išplėstinis	Funkcijos išvestinė	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	2
2				Funkcijos išvestinė	Matematinis problemų sprendimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	5

Automobilio greičio testas

Bendroji įvestis

Inžinierius aiškinasi, kaip juda naujas automobilio modelis, ir atlieka greičio testus.

Sakykime, suprogramuojama, kad automobilis judėtų taip, jog jo greitis (metrais per sekundę) laiko momentu t (sekundėmis) būtų lygus $v(t)$.

Užduotys

1 užduotis

Automobilis suprogramuojamas pirmąsias 5 sekundes judėti tokiu greičiu:

$$v(t) = 3t^2 + 2t, \quad t \in [0,5].$$

Integruodami greitį neapibrėžtiniu integralu, apskaičiuokite pirmąją funkciją $s(t)$, kuri aprašo automobilio nuvažiuotą atstumą (metrais) per laiką t (sekundėmis).

2 užduotis

Automobilis suprogramuojamas pirmąsias 10 sekundžių judėti tokiu greičiu:

$$v(t) = t^2 - 2t + 1, \quad t \in [0,10]$$

Raskite pirmąją funkciją $s(t)$, kuri aprašo automobilio nuvažiuotą atstumą (metrais) per laiką t , jei žinoma, kad pradinio laiko momentu ($t = 0$) automobilis buvo vietoje ($s(0) = 0$).

Pagal rastą pirmąją funkciją apskaičiuokite automobilio atstumą nuo pradinio taško po 0,5 s nuo judėjimo pradžios. Atsakymą pateikite keturių reikšminių skaitmenų tikslumu.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Pirmąją funkciją gauname integruodami greičio funkciją: $s(t) = \int v(t)dt = \int (3t^2 + 2t)dt.$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (kelio išreiškimą integralu).
Suintegruojame ir gauname: $s(t) = t^3 + t^2 + C.$ Atsakymas: $s(t) = t^3 + t^2 + C.$	1	Už apskaičiuotą teisingą integralą.
Pastabos		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
Pirmąją funkciją gauname integruodami greičio funkciją: $s(t) = \int (t^2 - 2t + 1)dt.$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (kelio išreiškimą integralu).
Suintegruojame ir gauname: $s(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + t + C.$	1	Už apskaičiuotą teisingą integralą.
Kadangi duota, jog pradinio momentu $t = 0$ automobilis buvo vietoje, t. y. $s(0) = 0$, įstatome $t = 0$: $s(0) = C$ arba $C = 0.$	1	Už apskaičiuotą integralinės konstantos reikšmę.
Taigi, automobilio nuvažiuotas atstumas po 0,5 s: $s(0,5) = \frac{0,5^3}{3} - 0,5^2 + 0,5.$	1	Už teisingą reikšmės $t = 0,5$ įstatymą į atstumo funkciją.
Apskaičiuojame ir gauname: $s(0,5) \approx 0,2917.$ Ats.: 0,2917 metro.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite duotos greičio funkcijos integralą. Taip rasite nuvažiuoto kelio funkciją.

2 užuomina. Interpretuokite gautą reiškinį. Kuri jo dalis atitinka tai, kad automobilio pradinė padėtis nėra nurodyta? Ar įmanomas toks atvejis, kad dviejose skirtingose situacijose automobilio greitis buvo toks pat, tačiau automobilis buvo skirtingose vietose?

2 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite duotos greičio funkcijos integralą. Taip rasite nuvažiuoto kelio funkciją.

2 užuomina. Suintegravę greičio funkciją, gautam reiškiniui pritaikykite sąlygoje pateiktą papildomą sąlygą $s(0) = 0$. Taip nustatysite integravimo konstantos C reikšmę.

3 užuomina. Gautoje $s(t)$ išraiškoje naudokite konstantą C , apskaičiuotą pagal papildomą sąlygą $s(0) = 0$. Įsistatykite $t = 0,5$ ir apskaičiuokite $s(0,5)$.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Modeliai ir sąryšiai	Išplėstinis	Pirmyktė funkcija ir integralas	Matematinis komunikavimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Pagrindinis	2
2				Pirmyktė funkcija ir integralas	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	5

Oro tarša mieste

Bendroji įvestis

Miesto valdžia analizuoja oro taršą, susidarančią dėl automobilių išmetamųjų dujų. Centrinėje gatvėje buvo atliktas oro taršos tyrimas. Nustatyta, kad tarša per parą svyruoja ir gali būti aprašyta funkcija:

$$C(t) = 50 + 20 \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right),$$

kur $C(t)$ – oro užterštumo lygis ($\mu\text{g}/\text{m}^3$),

t – paros laikas valandomis (nuo 0 iki 24).

Užduotys

1 užduotis

Apskaičiuokite mažiausią ir didžiausią oro užterštumo lygį.

2 užduotis

Kurią valandą oro tarša mažiausia? Kurią valandą didžiausia?

3 užduotis

Kai užterštumo lygis viršija $60 \mu\text{g}/\text{m}^3$, laikoma, kad tarša yra kenksminga sveikatai. Nustatykite laiko intervalą, kada oro tarša tampa kenksminga, t. y. $C(t) > 60$.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Kai $\sin(x) = -1$: $C_{min.} = 50 - 20 = 30$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Kai $\sin(x) = 1$: $C_{maks.} = 50 + 20 = 70$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Laikas, kada oro tarša didžiausia $\sin(x) = 1$, kai $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, todėl: $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi t}{12}$.	1	Už sudarytą teisingą lygtį t rasti, ieškant, kada tarša didžiausia.
Oro tarša didžiausia, kai $t = 6$ valandos.	1	Už gautą teisingą laiką, kada tarša didžiausia.
Laikas, kada oro tarša mažiausia: $\sin(x) = -1$, kai $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, todėl: $\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi t}{12}$.	1	Už sudarytą teisingą lygtį t rasti, ieškant, kada tarša mažiausia.
Oro tarša mažiausia, kai $t = 18$ valandų.	1	Už gautą teisingą laiką, kada tarša mažiausia.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Iš sąlygos turime: $50 + 20 \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) > 60$, todėl gauname nelygybę: $\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) > 0,5$.	1	Už gautą teisingą nelygybę funkcijai $\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$.
Pagal sinuso funkcijos savybes, gauname: $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{12}t < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$.	1	Už gautą teisingą nelygybę kintamajam t .
Todėl laikas t yra iš intervalo: $2 < t < 10$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti funkcija $\sin x$? Kokią mažiausią reikšmę?

2 užuomina. Nustatytas didžiausią ir mažiausią $\sin x$ reikšmes įsistatykite į reiškinių

$C(t) = 50 + 20 \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$. Taip rasite didžiausią ir mažiausią $C(t)$ reikšmes.

2 užduotis

1 užuomina. Nustatykite, kada $\sin(x) = 1$? Kada $\sin(x) = -1$?

2 užuomina. Jeigu $\sin(x) = 1$, kai $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, tuomet su kokiomis t reikšmėmis (nuo 0 iki 24) galioja lygybė $\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 1$?

3 užuomina. Jeigu $\sin(x) = -1$, kai $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, tuomet su kokiomis t reikšmėmis (nuo 0 iki 24) galioja lygybė $\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -1$?

3 užduotis

1 užuomina. Kokią nelygybę galite sudaryti iš sąlygoje pateiktų duomenų? Užrašykite nelygybę funkcijai $\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ ir ją suprastinkite – sutraukite panašiuosius narius ir padalykite abi nelygybės puses iš bendro daugiklio.

2 užuomina. Remkitės funkcijos $\sin x$ reikšmių lentelę ir nustatykite, kada ji įgyja nelygybėje gautą reikšmę. Atkreipkite dėmesį, kad funkcija $\sin x$ intervale $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ auga, o intervale $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ mažėja.

3 užuomina. Apskaičiuokite, kada $\sin x = 0,5$ intervale $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ir kada $\sin x = 0,5$ intervale $x \in (0, \pi)$. Laikykite, kad x atitinka $\frac{\pi}{12}t$, ir apskaičiuokite atitinkamas t reikšmes.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis		Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Modeliai ir sąryšiai	Išplėstinis	Trigonometrinės lygtys ir nelygybės	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Trigonometrinės lygtys ir nelygybės	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	4
3				Trigonometrinės lygtys ir nelygybės	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	3

Spindulių sekimas 3D animacijoje

Bendroji įvestis

Kuriant trimates (3D) animacijas ar filmus, labai svarbu tiksliai apskaičiuoti, kaip šviesa sklinda ir sąveikauja su objektais: atsispindi, lūžta ar susigeria. Kad vaizdas atrodytų realistiškai, naudojami matematiniai modeliai, pagrįsti **spindulių sekimo (angl. Ray Tracing)** metodu.

Šis metodas leidžia apskaičiuoti, kaip kiekvienas šviesos spindulys keliauja erdvėje ir kaip keičiasi jo intensyvumas susidūrus su įvairiomis medžiagomis. Kiekvienam vaizduojamam spinduliui gali būti taikomas supaprastintas matematinis modelis, kuris įvertina **šviesos sugertį** skaidriose medžiagose.

Modeliuosime atvejį, kai šviesa pereina per stiklo sluoksnį. Spindulio intensyvumas mažėja, priklausomai nuo stiklo sluoksnio, per kurį pereina šviesa, storio ir jo sugerties savybių. Šį procesą apibūdina **eksponentinis sugerties dėsnis**, išreiškiamas formule:

$$I = I_0 \cdot e^{-\int_0^h \mu(x) dx}$$

Čia:

- I_0 – pradinė šviesos intensyvumo reikšmė prieš medžiagą,
- I – šviesos intensyvumas po stiklu,
- $\mu(x)$ – sugerties koeficientas, galintis kisti, priklausomai nuo gylio x ,
- h – stiklo storis (cm).

Toliau pateiktos užduotys remiasi šiuo supaprastintu modeliu.

Tarkime, kad:

- pradinė šviesos intensyvumo reikšmė prieš langą yra $I_0 = 100$;
- stiklo medžiagos sugerties koeficientas μ yra pastovus ir lygus 0,2.

Užduotys

1 užduotis

Apskaičiuokite, koks bus šviesos, kuri krenta statmenai stiklo lakšto paviršiui, intensyvumas po stiklu, kai stiklo storis h yra 2 cm. Atsakymą pateikite keturių reikšminių skaitmenų tikslumu.

2 užduotis

Kokio storio stiklo reikėtų, kad per jį pereitų tik 20 % pradinio šviesos intensyvumo? Atsakymą pateikite trijų reikšminių skaitmenų tikslumu.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Įrašome sąlygoje pateiktus dydžius į šviesos intensyvumo po stiklu formulę ir gauname: $I = 100 \cdot e^{-\int_0^2 0,2 dx}$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Apskaičiuojame integralinį reiškinį ir gauname: $-\int_0^2 0,2 dx =$ $= -0,2x \Big _0^2 = -0,2(2 - 0) = -0,4.$	1	Už apskaičiuotą teisingą integralinį reiškinį.
Gauname: $I = 100 \cdot e^{-0,4} \approx 67,03.$ Ats.: $I \approx 67,03.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Sudarykime lygtį stiklo storiui h , kad perėjus stiklą liktų tik 20 % pradinio šviesos intensyvumo: $0,2I_0 = I_0 \cdot e^{-\int_0^h \mu(x) dx}$ arba $0,2 = e^{-\int_0^h \mu(x) dx}$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Apskaičiuojame integralinį reiškinį ir gauname: $-\int_0^h 0,2 dx =$ $= -0,2x \Big _0^h = -0,2(h - 0) = -0,2 \cdot h.$	1	Už apskaičiuotą integralinį reiškinį.
Logaritmuojame lygtį pagrindu e ir gauname: $\ln(0,2) = -0,2h$	1	Už gautą teisingą tiesinę lygtį storiui h apskaičiuoti.
Pertvarkome lygtį ir gauname: $h = \frac{\ln 0,2}{-0,2} \approx 8,05 \text{ cm.}$ Ats.: 8,05 cm.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Įsistatykite sąlygoje pateiktus skaičius ir apskaičiuokite I reikšmę.

2 užuomina. Į formulę $I = I_0 \cdot e^{-\int_0^h \mu(x) dx}$ įsistatykite $I_0 = 100$, $\mu = 0,2$ ir $h = 2$. Suintegruokite eksponentės laipsnyje esantį reiškinį ir apskaičiuokite I reikšmę.

2 užduotis

1 užuomina. Suformuluokite lygtį, kurios vienoje pusėje būtų 20 % pradinio šviesos intensyvumo, o kitoje – pagal formulę $I = I_0 \cdot e^{-\int_0^h \mu(x) dx}$ apskaičiuotas intensyvumas. Išprastinkite I_0 abiejose lygties pusėse.

2 užuomina. Apskaičiuokite integralinį reiškinį. Atkreipkite dėmesį, kad integruojant konstantą pagal kintamąjį x gaunama x ir šios konstantos sandauga. Įsistatykite h ir 0) ir apskaičiuokite integralinį reiškinį.

3 užuomina. Gautą lygtį logaritmuokite pagrindu e ir apskaičiuokite ieškomą h reikšmę.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis		Tema	MS gebėjimų pogrūpis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Modeliai ir sąryšiai	Išplėstinis	Pirmykštė funkcija ir integralas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	3
2				Pirmykštė funkcija ir integralas	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	4

Stogo nuolydis

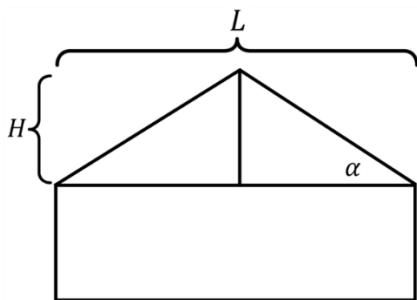
Bendroji įvestis

Statant pastatą, labai svarbu tinkamai suplanuoti stogo nuolydžio kampą. Jei nuolydis per mažas, ant stogo kaupiasi krituliai ir stogo konstrukcija patiria didesnes apkrovas. Tokiais atvejais gali prireikti tvirtesnių atramų, o kraštutiniu atveju kyla rizika, kad stogas gali įgriūti.

Kad krituliai galėtų efektyviai nutekėti ir nepatektų į pastato vidų, būtina parinkti stogo dangą pagal gamintojų rekomenduojamus minimalius nuolydžio kampus. Lentelėje nurodyti minimalūs leistini nuolydžio kampai, užtikrinantys tinkamą skirtingų dangų funkcionavimą.

Stogo danga	Minimalus nuolydis laipsniais
Bituminė ritininė danga, 2 sluoksniai (klijuojama)	3°
Bituminis banguotasis lakštas	5°
Plieninė trapecinio profilio skarda	7°
Banguoti plaušacemenčio lakštai (šiferis)	12°
Betoninės čerpės	14°
Keraminės čerpės	16°
Lygaus plaušacemenčio lakštai	25°

Pateiktoje pastato schemoje nuolydžio kampas žymimas α , stogo pagrindo ilgis – L , o kraigo aukštis – H . Pastato stogo skersinis pjūvis – lygiašonis trikampis, sudarytas iš dviejų vienodų stačiųjų trikampių.



Užduotys

1 užduotis

Namo stogo kraigo aukštis yra 2,5 m, o visas stogo pagrindo ilgis – 10 m. Remkitės pateikta lentele ir nustatykite, ar šiam stogui galima naudoti keramines čerpes.

2 užduotis

Projektuojamas sandėlio stogas, kurio kraigo aukštis 3,5 m, o visas stogo pagrindo ilgis – 12 m. Kurias iš lentelėje nurodytų stogo dangų galima naudoti? Pagrįskite savo sprendimą skaičiavimais.

3 užduotis

Žiemos metu ant stogo susikaupusio sniego apkrova priklauso nuo stogo nuolydžio kampo α ir yra apskaičiuojama pagal formulę:

$$F = P \cdot (1 - \sin \alpha),$$

čia:

- F – faktinė sniego apkrova (kg/m^2),
- $P=100\text{kg/m}^2$ – standartinė sniego apkrova, kai stogas horizontalus,
- α – stogo nuolydžio kampas (laipsniais).

Paaiškinimas: kuo statesnis stogo nuolydis, tuo mažiau sniego ant jo susikaupia, tuo daugiau sniego nuo jo nuslenka, todėl apkrova mažėja. Ši formulė – supaprastintas fizikinis modelis, naudojamas skaičiuojant leistiną stogo apkrovą. Jei konstrukcija gali atlaikyti ne daugiau kaip 80 kg/m^2 , koks turi būti mažiausias stogo nuolydžio kampas, kad konstrukcija būtų saugi? Atsakymą pateikite keturių reikšminių skaitmenų tikslumu.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Tegul α – nuolydžio kampas, kurį sudaro stogo šlaitas su pagrindu, tuomet $tg(\alpha) = \frac{2,5}{5} = 0,5$.	1	Už nuolydžio kampo tangento apskaičiavimą.
Tuomet nuolydžio kampas lygus: $\alpha = \arctg 0,5 \approx 26,57^\circ$.	1	Už nuolydžio kampo apskaičiavimą.
Keraminėms čerpėms reikalingas minimalus nuolydis 16° yra mažesnis už $26,57^\circ$, todėl keramines čerpes naudoti galima. Ats.: keramines čerpes naudoti galima.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Taip pat galima spręsti pritaikant kampo sinuso, kosinuso arba kotangento apibrėžimą. Tokiu atveju pirmasis taškas skiriamas už kampo α sinuso, kosinuso arba kotangento apskaičiavimą.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Tegul β – nuolydžio kampas, kurį sudaro stogo šlaitas su pagrindu, tuomet: $tg(\beta) = \frac{3,5}{6} \approx 0,5833$.	1	Už nuolydžio kampo tangento apskaičiavimą.
Tuomet nuolydžio kampas lygus: $\beta = \arctg 0,5833 \approx 30,25^\circ$.	1	Už nuolydžio kampo apskaičiavimą.
Remiantis lentele, galima naudoti visas dangas. Ats.: galima naudoti visas lentelėje nurodytas dangas.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Taip pat galima spręsti pritaikant kampo sinuso, kosinuso arba kotangento apibrėžimą. Tokiu atveju pirmasis taškas skiriamas už kampo α sinuso, kosinuso arba kotangento apskaičiavimą.		

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Kadangi $F \leq 80 \frac{kg}{m^2}$, sudarome nelygybę: $100 \cdot (1 - \sin \alpha) \leq 80$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (nelygybės sudarymą).
Pertvarkome nelygybę ir gauname:	1	Už nelygybės pertvarkymą, sutraukiant panašiuosius narius.

$\sin(\alpha) \geq 0,2.$		
Kadangi $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, gauname: $\alpha \geq \arcsin(0,2) \approx 11,54^\circ.$ Ats.: bent $11,54^\circ.$	1	<i>Už gautą teisingą atsakymą.</i>

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Nagrinėkite statųjį trikampį, kurio pagrindas – pusė stogo pagrindo ilgio.

2 užuomina. Pritaikykite stačiojo trikampio kampo tangento apibrėžimą. Kam lygus nuolydžio kampo tangentas?

3 užuomina. Apskaičiuokite nuolydžio kampo tangento reikšmę. Naudokitės skaičiuotuvu ir pagal ją apskaičiuokite nuolydžio kampo dydį. Palyginkite jį su lentelėje pateiktais duomenimis ir nustatykite, ar šiam stogui galima naudoti keramines čerpes.

2 užduotis

1 užuomina. Nagrinėkite statųjį trikampį, kurio pagrindas – pusė stogo pagrindo ilgio.

2 užuomina. Pritaikykite stačiojo trikampio kampo tangento apibrėžimą. Kam lygus nuolydžio kampo tangentas?

3 užuomina. Apskaičiuokite nuolydžio kampo tangento reikšmę. Naudokitės skaičiuotuvu ir pagal ją apskaičiuokite nuolydžio kampo dydį. Palyginkite jį su lentelėje pateiktais duomenimis ir nustatykite, kurios dangos tinkamos šiam stogui.

3 užduotis

1 užuomina. Jei žinome, kad $F \leq 80$ ir $F = P \cdot (1 - \sin \alpha)$, tuomet kokią nelygybę galime sudaryti iš šių duomenų? Įsistatykite P reikšmę, pateiktą sąlygoje.

2 užuomina. Gautoje nelygybėje sutraukite panašiuosius narius ir suprastinkite, kad gautumėte nelygybę nariui $\sin \alpha$. Pritaikykite kampo arkosinuso apibrėžimą ir pagal tai apskaičiuokite kampo α dydį.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis		Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Modeliai ir sąryšiai	Išplėstinis	Trigonometrinės lygtys ir nelygybės	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3
2				Trigonometrinės lygtys ir nelygybės	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3
3				Trigonometrinės lygtys ir nelygybės	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	3

IV GIMANZIJOŠ KLASĒ, IŠPLĒSTINIS KURSAS, GEOMETRIJA IR MATAVIMAI

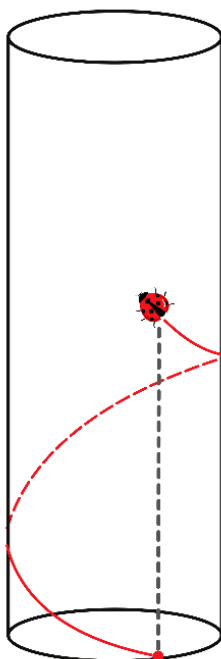
Boružėlė

Bendroji įvestis

Boružėlė lipa aukštyn ritinio paviršiumi. Ritinio pagrindo spindulys – R , pagrindo perimetras – P , o boružėlės nueitas kelias – L .

Boružėlė apsuka pilną ratą, kai pasiekia tašką, kuris yra tiesiai virš jos kelionės pradžios taško (žr. paveikslą).

Boružėlė juda pastoviu greičiu, o kampas tarp jos judėjimo trajektorijos ir jos kertamos ritinio sudaromosios visą laiką yra pastovus. Lipdama boružėlė aplink ritinį brėžia spiralės formos trajektoriją.



Užduotys

1 užduotis

Pagrindo spindulys $R = 5 \text{ cm}$. Kam lygus pagrindo perimetras P ? Atsakymą pateikite su skaičiumi π .

2 užduotis

Ritinio pagrindo perimetras $P = 10 \text{ cm}$. Apsukusi aplink šį ritinį vieną pilną ratą boružėlė buvo $H = 30 \text{ cm}$ aukštyje. Kokio ilgio kelią boružėlė nuėjo?

3 užduotis

Ritinio aukštis $H = 60\text{ cm}$, jo pagrindo perimetras $P = 9\text{ cm}$, o boružėlė iš viso nuėjo $L = 303\text{ cm}$. Kiek kartų apie ritinio ašį ji apsuko lipdama?

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
$P = 2\pi R.$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą pritaikyti teisingą formulę.
$P = 10\pi.$	1	Už teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Nagrinėjame ritinio šoninio paviršiaus išklotinę. Tokia išklotinė yra stačiakampis, kurio pagrindas P, aukštis H, o įstrižainė L. Pagal Pitagoro teoremą: $P^2 + H^2 = L^2.$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą ieškomam dydžiui rasti pritaikyti Pitagoro teoremą.
$L^2 = 1000.$	1	Už teisingai užrašytą lygybę.
$L = 10\sqrt{10} \text{ cm}$ ir $L = -10\sqrt{10} \text{ cm}$ (neteisingas)	1	Už gautą teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Nagrinėjame ritinio šoninio paviršiaus išklotinę, pratęstą taip, kad atspindėtų visą boružėlės nueitą kelią. Tokia išklotinė yra stačiakampis, kurio pagrindas nP, aukštis H, o įstrižainė L. Pagal Pitagoro teoremą: $(nP)^2 + H^2 = L^2.$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą ieškomam dydžiui rasti pritaikyti Pitagoro teoremą.
$81n^2 = 88209.$	1	Už teisingai užrašytą kvadratinę lygtį.
$n = 33$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Kokia plokštumos figūra yra ritinio pagrindas?

2 užuomina. Prisiminkite apskritimo ilgio formulę. Įsistatykite į ją sąlygoje duotą spindulį ir apskaičiuokite atsakymą.

2 užduotis

1 užuomina. Nagrinėkite ritinio šoninio paviršiaus išklotinę kaip stačiakampio formos plokštumos dalį. Atkreipkite dėmesį, kad joje boružėlė judėjo tiesia atkarpa, nes, pagal sąlygą: „kampas tarp jos judėjimo trajektorijos ir jos kertamos ritinio sudaromosios visą laiką yra pastovus“.

2 užuomina. Sąlygoje pateiktiems dydžiams P , H ir nežinomam dydžiui L pritaikykite Pitagoro teoremą. Išspręskite gautą lygtį ir apskaičiuokite L .

3 užduotis

1 užuomina. Nagrinėkite ritinio šoninio paviršiaus išklotinę. Pratęskite ją horizontaliai taip, kad atsispindėtų visos boružėlės nueitas kelias. Atkreipkite dėmesį, kad ritinio išklotinėje boružėlė judėjo tiesia atkarpa. Taigi išklotinėje susidaro statusis trikampis, kurio įstrižainė – boružėlės nueitas kelias. Kam lygus tokios išklotinės plotis, jei boružėlė apsuko n ratų?

2 užuomina. Įsivaizduokite, kad šioje išklotinėje yra toks statusis trikampis, kurio apatinio pagrindo ilgį gausite, jei n sudauginsite su ritinio pagrindo perimetru, t. y. apatinis pagrindas lygus $n \cdot P$. Kitų dviejų šio trikampio kraštinių ilgiai duoti sąlygoje. Šioms trims kraštinėms pritaikykite Pitagoro teoremą ir apskaičiuokite n – kiek ratų aplink ritinį apsuko boružėlė.

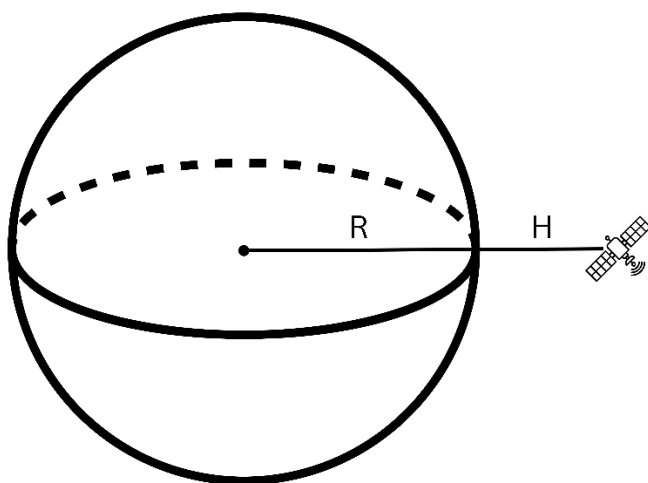
Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrūpis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Geometrija ir matavimai	Išplėstinis	Briauniniai, sukiniai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Briauniniai, sukiniai	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3
3				Briauniniai, sukiniai	Matematinis problemų sprendimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	3

MS-12-411. Palydovas (12 kl.)

Bendroji įvestis

Žemė yra sferos formos, jos spindulys $R = 6400 \text{ km}$. Aplink Žemę, aukštyje $H = 400 \text{ km}$ virš Žemės paviršiaus, skrieja palydovas. Šio palydovo skrydžio trajektorija aplink mūsų planetą yra apskritimo, kurio centras yra planetos centras, formos.



Užduotys

1 užduotis

Jei Žemės rutulį perpjautume pusiau per centrą, koks būtų šio pjūvio plotas kvadratiniais kilometrais? Atsakymą užrašykite su π .

2 užduotis

Kokį kelią turėtų nukeliauti palydovas, kad aplink Žemę apskristų vieną pilną ratą? Atsakymą suapvalinkite iki tūkstančių kilometrų.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
$S = \pi R^2$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą pritaikyti skritulio ploto formulę.
$S = 40960000 \cdot \pi \text{ km}^2$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Jei atsakymas paliktas pavidalu $S = 6400^2 \cdot \pi \text{ km}^2$, taškai taip pat skiriami.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Palydovas skrenda apskritimu, kurio spindulys yra $R + H$: $R + H = 6400 + 400 = 6800 \text{ km}$	1	Už teisingai apskaičiuotą atstumą iki Žemės centro.
Apskritimo ilgis (trajektorijos ilgis): $L = 2\pi (R + H) = 2\pi \cdot 6800 = 13600 \cdot \pi \text{ km} \approx 42704 \text{ km}$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą pritaikyti apskritimo ilgio formulę ir apskaičiuotą teisingą atsakymą.
$L \approx 43000 \text{ km}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą, suapvalinta iki tūkstančių.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Jei sferą perpjausite pusiau, kokios formos pjūvį gausite?

2 užuomina. Pritaikykite skritulio ploto formulę ir apskaičiuokite atsakymą.

2 užduotis

1 užuomina. Koku atstumu nuo Žemės centro yra palydovas?

2 užuomina. Gautą dydį įsistatykite į apskritimo ilgio formulę.

3 užuomina. Įsistatykite $\pi \approx 3,14$, apskaičiuokite reiškinį ir suapvalinkite atsakymą iki artimiausio pilno milijono.

Metaduomenys

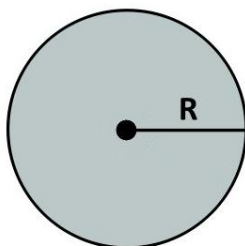
Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Geometrija ir matavimai	Išplėstinis	Briaunainiai, sukiniai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Briaunainiai, sukiniai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	3

Vandenilio molekulė

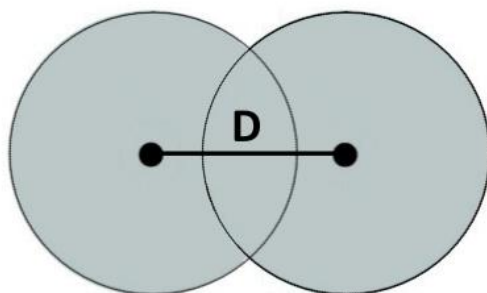
Bendroji įvestis

Žiūrint labai supaprastintai, atomus galima modeliuoti kaip mažus rutulio formos kūnus. Jų dydis matuojamas pikometrais (pm). Kartais atomai sudaro junginius. Tuomet galima įsivaizduoti, kad atomus vaizduojantys rutuliai iš dalies persikloja.

Pavyzdžiui, vandenilio atomo spindulys apytiksliai lygus $R = 53 pm$.



Kai du vandenilio atomai susijungia, atstumas tarp jų centrų $D = 74 pm$.



Kai du rutuliai susijungia ir iš dalies persikloja, šios naujos figūros, sudarytos iš dviejų persiklojusių rutulių, paviršiaus plotas yra mažesnis nei dviejų atskirų rutulių paviršiaus plotų suma.

Užduotys

1 užduotis

Kam lygus rutulio, kurio spindulys $R = 53 pm$, paviršiaus plotas? Atsakymą užrašykite su π .

2 užduotis

Susijungus dviem vandenilio atomus vaizduojantiems rutuliams, gauta figūra. Kam lygus šios figūros paviršiaus plotas? Atsakymą užrašykite su π .

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
$S_{pav} = 4 \cdot \pi \cdot R^2.$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą pritaikyti rutulio paviršiaus ploto formulę.
$S_{pav} = 4 \cdot \pi \cdot 53^2 = 11236 \cdot \pi \text{ pm}^2.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
$S_{nuopjovos} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h,$ čia h – nuopjovos aukštis.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą pritaikyti rutulio nuopjovos paviršiaus ploto formulę.
$D = 53 - (74 - 53) = 32 \text{ pm}.$ $D = 2 \cdot h,$ todėl $h = \frac{32}{2} = 16 \text{ pm}.$	1	Už teisingai apskaičiuotą nuopjovos aukštį.
$S_{nuopjovos} = 2 \cdot \pi \cdot 53 \cdot 16 = 1696 \cdot \pi \text{ pm}^2.$	1	Už teisingai apskaičiuotą vieno rutulio nuopjovos paviršiaus plotą.
$S_{bendras} = 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 53^2 - 2 \cdot 1696 \cdot \pi.$	1	Už pasirinktą sprendimo būdą pritaikyti teisingą formulę dviejų persiklojančių rutulių paviršiaus plotui apskaičiuoti.
$S_{bendras} = 19080 \cdot \pi \text{ pm}^2.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite, kaip apskaičiuojamas rutulio paviršiaus plotas.

2 užuomina. Įstatykite sąlygoje duotą R reikšmę į rutulio paviršiaus ploto formulę ir apskaičiuokite reiškinį.

2 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite, kaip apskaičiuojamas rutulio nuopjovos paviršiaus plotas.

2 užuomina. Panaudokite sąlygoje duotas D ir R reikšmes ir apskaičiuokite, kam lygus rutulio nuopjovos aukštis h . Brėžinyje h atitinka pusę persiklojančios srities horizontalaus pločio D (t. y. $D = 2h$).

3 užuomina. Jei sudėsite dviejų rutulių paviršiaus plotus, kiek kartų iš gauto rezultato reikėtų atimti nuopjovos paviršiaus plotą, kad gautumėte sujungtos figūros paviršiaus plotą?

Metaduomenys

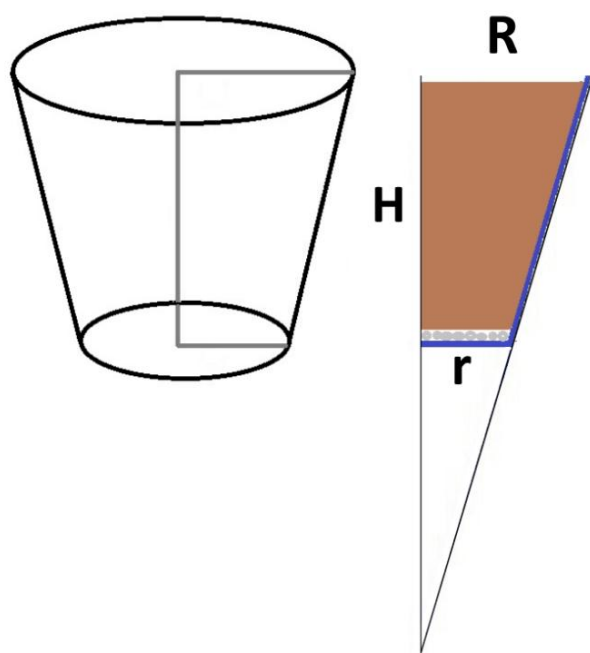
Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Geometrija ir matavimai	Išplėstinis	Briauniniai, sukiniai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Briauniniai, sukiniai	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	5

Vazono užpildymas

Bendroji įvestis

Gėlės vazonas yra nupjautinio kūgio formos, jo aukštis $H = 20$ cm, o apačios ir viršaus pagrindų spinduliai lygūs $r = 10$ cm ir $R = 12$ cm.

Į vazoną žemių iki pat viršaus neberiama – tarp jo viršaus plokštumos ir žemių paviršiaus paliekamas 1 cm atstumas. Be to, vazono dugne suformuojamas 1 cm storio smulkių akmenukų sluoksnis.



Užduotys

1 užduotis

Jei augalas išaugo 30 cm vertikaliai virš žemių paviršiaus, kam lygus atstumas nuo vazono žemiausios plokštumos iki augalo viršutinio taško?

2 užduotis

Jei vazoną pastatytume ant ritinio, kurio aukštis 5 mm, o pagrindo spindulys toks pat, kaip ir vazono dugno, koks būtų tokio ritinio tūris? Pateikite tūrio išraišką su π .

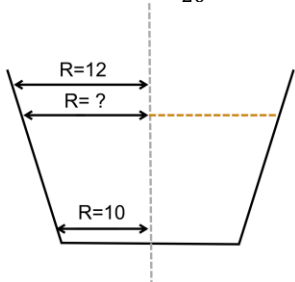
3 užduotis

Vazono spindulys yra atstumas horizontalioje plokštumoje, lygiagrečioje su vazono pagrindo plokštuma, nuo kūgio ašies iki išorinio vazono paviršiaus. Apskaiciuokite šį vazono spindulį toje plokštumoje, kurioje yra viršutinis žemių paviršius. Atsakymą pateikite centimetrais, dešimtųjų centimetro dalių tikslumu.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Kadangi atstumas nuo vazono apačios iki žemių paviršiaus yra 1 cm mažesnis nei vazono aukštis, atstumas nuo vazono apačios iki žemės paviršiaus: $H - 1 = 19 \text{ cm}$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Atstumas nuo vazono apačios iki augalo viršaus: $19 + 30 = 49 \text{ cm}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Jei vazono aukštis sudedamas su gėlės aukščiu ($20 + 30 = 50$), tačiau pamirštama atimti 1, iš viso skiriamas 1 taškas.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Apskaičiuojame pagrindo plotą: $\pi \cdot r^2 = 100 \cdot \pi \text{ cm}^2$.	1	Už teisingai apskaičiuotą pagrindo plotą.
$V = 0,5 \cdot 100 \cdot \pi = 50\pi \text{ cm}^3$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Jei atsakymas apskaičiuojamas su įsistatyta π reikšme, taškai irgi skiriami.		

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Žemių paviršiaus plokštumos aukštis vazono apačios atžvilgiu yra 19 cm.	1	Už gautą teisingą aukštį, kuriame yra viršutinis žemių lygmuo.
Tai sudaro 19/20 vazono aukščio dalį (arba atstumas nuo viršaus sudaro 1/20 dalį).	1	Už teisingą apskaičiavimą, kokią aukščio dalį sudaro žemių paviršiaus plokštumos aukštis.
Spindulys = $10 + \frac{19}{20} \cdot (12 - 10)$ arba Spindulys = $12 - \frac{1}{20} \cdot (12 - 10)$ 	1	Už teisingai sudarytą lygtį spinduliui rasti.
Ats.: 11,9 cm.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad žemių paviršius yra 1 cm žemiau nei vazono viršus.

2 užuomina. Sudėkite gėlės aukštį su žemių paviršiaus aukščiu ir gausite atsakymą.

2 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite skritulio ploto formulę ir apskaičiuokite vazono žemiausios dalies paviršiaus plotą.

2 užuomina. Prisiminkite ritinio tūrio formulę. Į ją įsistatykite sąlygoje duotas reikšmes ir apskaičiuokite gautą reiškinį.

3 užduotis

1 užuomina. Nustatykite, kokiame aukštyje vazono apačios atžvilgiu yra žemių paviršiaus plokštuma.

2 užuomina. Papildykite brėžinį: pratęskite vazono ašį ir šoninę kraštinę iki jų susikirtimo taško. Nagrinėkite panašiuosius trikampius ir susidarykite proporciją atsakymui rasti. Tokią pačią proporciją galite gauti ir kitu būdu: apskaičiuokite, kokią dalį viso vazono aukščio sudaro žemių paviršiaus plokštumos aukštis (nuo vazono dugno iki žemių paviršiaus), taip pat apskaičiuokite viršutinio ir apatinio vazono spindulių skirtumą. Pagal šiuos duomenis, galite sudaryti proporciją ir apskaičiuoti, kiek vazono spindulys (žemių paviršiaus plokštumos aukštyje) yra ilgesnis už apatinio vazono spindulį.

3 užuomina. Kai apskaičiuosite atsakymą, patikrinkite, ar gautas rezultatas atrodo tikroviškai – jis turėtų būti artimas viršutinio vazono spindulio dydžiui.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis		Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Geometrija ir matavimai	Išplėstinis	Tiesės, plokštumos, kampai erdvėje	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Slenkstinis	2
2				Briauniniai, sukiniai	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	2
3				Briauniniai, sukiniai	Loginis mąstymas ir įrodymai	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	4

Švyturio restauracija

Bendroji įvestis

Pajūryje restauruojamas nupjautinio kūgio formos švyturys. Jo aukštis – 25 m, apatinio pagrindo spindulys – 5 m, viršutinio – 3 m.

Išorinės švyturio sienas – t. y. šoninį paviršių be viršutinės ir apatinės plokštumos – ketinama nudažyti specialiais atspariais dažais, kurių išeiga – 0,25 litro vienam kvadratiniam metrui.



Užduotys

1 užduotis

Kiek litrų dažų reikės švyturiui nudažyto, jei bus dažoma 2 dažų sluoksniais? Laikykite, kad $\pi = 3,1416$. Atsakymą pateikite suapvalintą iki šimtųjų.

2 užduotis

Kad švyturys būtų geriau matomas, nuspręsta jį dažyti horizontaliais, vienodo pločio, **raudonos ir baltos spalvos dryžiais**. Iš viso bus nudažyti **3 raudoni ir 2 balti dryžiai**. Kiek baltos spalvos dažų reikės, jeigu bus dažoma 2 dažų sluoksniais? Laikykite, kad $\pi = 3,14$. Tarpinių skaičiavimų rezultatus suapvalinkite iki šimtųjų. Atsakymą suapvalinkite iki sveikojo skaičiaus.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Apskaičiuojame švyturio sudaromosios l ilgį: $l = \sqrt{(R - r)^2 + h^2} = \sqrt{(5 - 3)^2 + 25^2} = \sqrt{629} \approx 25,08.$	1	Už apskaičiuotą švyturio sudaromosios ilgį.
Kadangi švyturys yra nupjautinis kūgis, jo šoninio paviršiaus plotas apskaičiuojamas pagal formulę: $S_{\text{šoninis paviršius}} = \pi (R + r) \cdot l = 3,1416 \cdot (5 + 3) \cdot 25,08 \approx 630,33 \text{ (kv. m)}.$	1	Už apskaičiuotą švyturio šoninio paviršiaus plotą.
Vienam dažų sluoksniui sunaudojama dažų: $S_{\text{šoninis paviršius}} \cdot 0,25 = 630,33 \cdot 0,25 \approx 157,58 \text{ (litro)}.$ Todėl dviem dažų sluoksniams sunaudojama dažų: $157,58 \cdot 2 = 315,16 \text{ (litro)}.$ Ats.: 315,16 litro.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
Kadangi iš viso yra 5 dryžiai, kiekvieno dryžio aukštis yra: $\text{vieno dryžio aukštis} = \frac{\text{bendras aukštis}}{5} = \frac{25}{5} \text{ m} = 5 \text{ m}.$	1	Už apskaičiuotą vieno dryžio aukštį.
Kiekvieną dryžį galima traktuoti kaip atskirą nupjautinį kūgį. Tad būtina žinoti kiekvieno jų viršutinio ir apatinio pagrindų spindulius r ir R. Spindulį bet kuriame aukštyje tarp viršutinio ir apatinio pagrindo apskaičiuojame pagal formulę: $r_{\text{aukštyje } x} = R + \left(\frac{r-R}{h} \right) \cdot x,$ arba tokiu būdu: kadangi yra 5 segmentai, atstumą tarp vidinių spindulių galima apskaičiuoti taip: $(5-3)/5=0,4.$ Taigi, baltų dryžių (antrojo ir ketvirtojo) apatinių ir viršutinių pagrindų spinduliai yra: Antrasis dryžis: viršuje 3,4 m, apačioje 3,8 m. Ketvirtasis dryžis: viršuje 4,2 m, apačioje 4,6 m.	1	Už apskaičiuotus spindulių ilgius baltų dryžių viršutiniams ir apatiniams pagrindams.

Pastebėkime, kad kiekvieno dryžio sudaromoji yra to paties ilgio, kadangi dryžiai išdėstomi vienodais atstumais. Taigi, apskaičiuokime vieno dryžio sudaromosios ilgį l pagal antrojo dryžio duomenis: $l = \sqrt{(R - r)^2 + h^2} = \sqrt{(3,8 - 3,4)^2 + 5^2} = \sqrt{25,16} \approx 5,02 \text{ (m)}.$	1	<i>Už apskaičiuotą vieno dryžio sudaromosios ilgį.</i>
Apskaičiuojame baltų dryžių šoninio paviršiaus plotus S_2 ir S_4: Antrasis dryžis: $S_2 = \pi (R + r) \cdot l = 3,14 \cdot (3,8 + 3,4) \cdot 5,02 \approx 113,49 \text{ (kv. m)}.$ Ketvirtasis dryžis: $S_4 = \pi (R + r) \cdot l = 3,14 \cdot (4,6 + 4,2) \cdot 5,02 \approx 138,71 \text{ (kv. m)}$	1	<i>Už apskaičiuotus antrojo ir ketvirtojo dryžiaus šoninio paviršiaus plotus.</i>
Dažų kiekis baltiems dryžiams (dviem sluoksniais): $(113,49 + 138,71) \cdot 0,25 \cdot 2 = 252,2 \cdot 0,25 \cdot 2 = 63,05 \text{ (litro)} \cdot 2 = 126,28 \text{ l}.$ Ats.: Baltiems dryžiams reikia 126,28 l dažų	1	<i>Už apskaičiuotą dažų kiekį baltiems dryžiams.</i>

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus skaičiavimo formulę.

2 užuomina. Nepamirškite, kad švyturys bus dažomas 2 dažų sluoksniais.

2 užduotis

1 užuomina. Nupieškite švyturį ir pažymėkite 5 dalis. Kokią figūrą atskirai atvaizduoja kiekvienas dryžis.

2 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad visi šie mažesni nupjautiniai kūgiai turi savo apatinius ir viršutinius spindulius. Nustatykite spindulio ilgį kiekvieno balto dryžio viršuje ir apačioje. Pagal tai galėsite apskaičiuoti baltų dryžių šoninio paviršiaus plotą ir rasti atsakymą.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis		Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Geometrija ir matavimai	Išplėstinis	Briauniniai, sukiniai	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3
2				Briauniniai, sukiniai	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	5

IV GIMANZIJO KLASĖ, IŠPLĖSTINIS KURSAS, DUOMENYS IR TIKIMYBĖS

Tikimybiniai bandymai su skirtingų spalvų rašikliais

Bendroji įvestis

Tikimybiniams bandymams paruoštas didelis vokas, į kurį įdėta 10 to paties modelio, bet skirtingų spalvų rašiklių. Voke yra 2 raudonos spalvos rašikliai, 3 žalios spalvos rašikliai ir 5 mėlynos spalvos rašikliai. Vykdomas tikimybinis bandymas. Pirmuoju ėmimu iš voko atsitiktinai paimamas vienas rašiklis, užrašoma jo spalva ir rašiklis grąžinamas atgal į voką. Po to antruoju ėmimu iš voko atsitiktinai paimamas dar vienas rašiklis ir užrašoma jo spalva.

Užduotys

1 užduotis

Apskaičiuokite įvykio E tikimybę $P(E)$, kai E – įvykis „Pirmuoju ėmimu ištrauktas mėlynas rašiklis, o antruoju ėmimu ištrauktas raudonas rašiklis“. Uždaviniui spręsti taikykite nepriklausomųjų įvykių savybes. Užrašykite sprendimą ir atsakymą.

2 užduotis

Apskaičiuokite įvykio B tikimybę $P(B)$, kai B – įvykis „Tarp pirmaisiais dviem ėmimais paimtų rašiklių bus ir žalias rašiklis, ir mėlynas rašiklis“. Užduočiai atlikti taikykite nepriklausomųjų ir nesutaikomųjų įvykių savybes. Užrašykite sprendimą ir atsakymą.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Išreiškime įvykį E per paprastesnius įvykius. Apsibrėžiame du pagalbinius įvykius: H – „Pirmuoju ėmimu iš voko ištrauktas mėlynas rašiklis“; K – „Antruoju ėmimu iš voko ištrauktas raudonas rašiklis“. Tada $P(E) = P(H \text{ ir } K)$. Pastebime, kad įvykiai H ir K yra tarpusavyje nepriklausomi, nes sąlygoje parašyta, kad ir pirmasis, ir antrasis rašikliai iš voko buvo imami <i>atsitiktinai</i>. Išvada: $P(E) = P(H) \cdot P(K)$.	1	Už pasirinktą teisingą strategiją įvykį E išreikšti per du nepriklausomus įvykius H ir K .
Pagal klasikinį tikimybinį modelį: $P(H) = \frac{5}{10};$ $P(K) = \frac{2}{10}.$	1	Už teisingai apskaičiuotas įvykių H ir K tikimybes.
Apskaičiuojame: $P(E) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$. Ats.: 0,1	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Įvykį B galima išreikšti per du nesutaikomus įvykius B_1 ir B_2. Apibrėžiame įvykius: B_1 – „Mėlynas rašiklis ištraukiamas pirmuoju traukimu, o žalias rašiklis ištraukiamas antruoju traukimu“; B_2 – „Žalias rašiklis ištraukiamas pirmuoju traukimu, o mėlynas rašiklis ištraukiamas antruoju traukimu“.	1	Už pastebėjimą, kad įvykis B įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta bent vienas iš įvykių B_1 ir B_2 , kitaip tariant, kad teisinga išraiška $P(B) = P(B_1 \text{ arba } B_2)$.
Kadangi įvykiai B_1 ir B_2 tarpusavyje nesutaikomi (t. y. jie negali įvykti vienu metu), tai $P(B) = P(B_1 \text{ arba } B_2) = P(B_1) + P(B_2)$.	1	Už atpažinimą, kad įvykiai B_1 ir B_2 yra nesutaikomieji, ir pastebėjimą, kad $P(B) = P(B_1) + P(B_2)$.
Įvykių B_1 ir B_2 tikimybes galima apskaičiuoti lygiai tokiu pačiu būdu, kaip apskaičiavome įvykio E tikimybę 1 užduotyje. Pritaikome nepriklausomųjų įvykių savybes ir gauname $P(B_1) = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15$ ir $P(B_2) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15$.	1	Už teisingai apskaičiuotas įvykių B_1 ir B_2 tikimybes.
Įstatome $P(B_1)$ ir $P(B_2)$ reikšmes, gauname: $P(B) = 0,15 + 0,15 = 0,3$. Ats.: 0,3	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Įsiveskite pagalbinius nepriklausomus įvykius: H – „Pirmuoju ėmimu iš voko ištrauktas mėlynas rašiklis“; K – „Antruoju ėmimu iš voko ištrauktas raudonas rašiklis“. Atkreipkite dėmesį, kad teisinga lygybė $P(E) = P(H \text{ ir } K)$.

2 užuomina. Pastebėkite, kad įvykiai H ir K yra tarpusavyje nepriklausomi, todėl $P(E) = P(H) \cdot P(K)$.

3 užuomina. Pritaikykite klasikinį tikimybės modelį įvykių H ir K tikimybės apskaičiuoti.

2 užduotis

1 užuomina. Apsibrėžkite įvykius: B_1 – „Mėlynas rašiklis ištraukiamas pirmuoju traukimu, o žalias rašiklis ištraukiamas antruoju traukimu“; B_2 – „Žalias rašiklis ištraukiamas pirmuoju traukimu, o mėlynas rašiklis ištraukiamas antruoju traukimu“. Pastebėkite, kad $P(B) = P(B_1 \text{ arba } B_2)$.

2 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad įvykiai B_1 ir B_2 yra tarpusavyje nesutaikomi, todėl $P(B_1 \text{ arba } B_2) = P(B_1) + P(B_2)$.

3 užuomina. Įvykių B_1 ir B_2 tikimybės apskaičiuoti pasinaudokite nepriklausomųjų įvykių savybėmis.

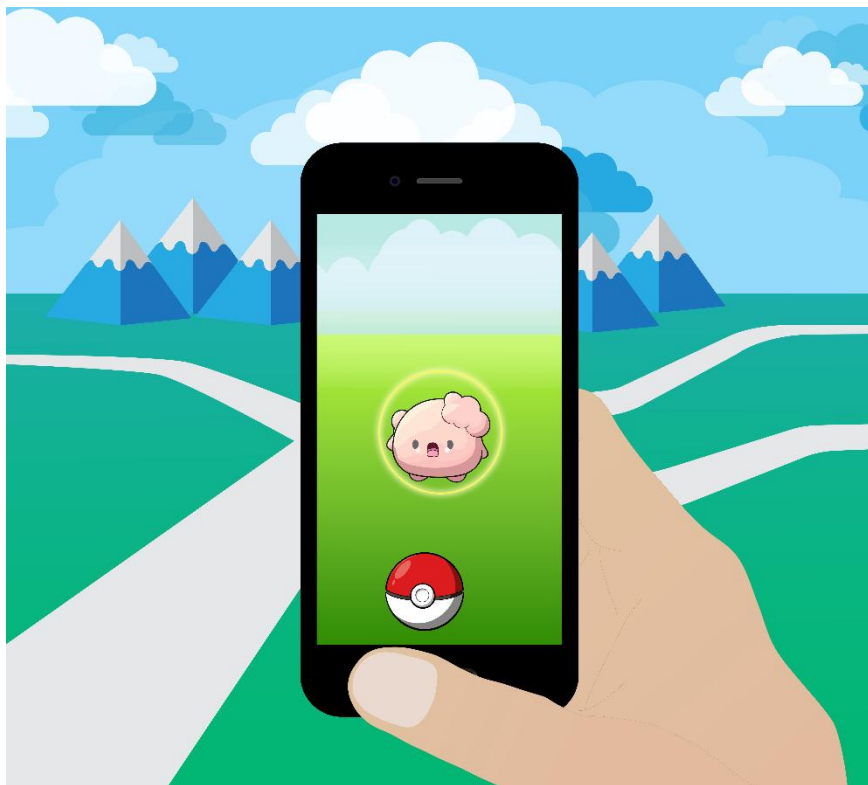
Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis		Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12 kl.	Duomenys ir tikimybės	Išplėstinis kursas	Klasikiniai ir neklasikiniai tikimybiniai modeliai	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3 t.
2				Klasikiniai ir neklasikiniai tikimybiniai modeliai	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	4 t.

Pokemonų gaudymas

Bendroji įvestis

Išmaniuoju telefonu žaidžiant žaidimą „Pokemon Walk“, reikia vaikščioti po tikras (ne virtualias) vietas ir įvairiose vietose (gatvėse, parkuose ir pan.) gaudyti „kišeninius monstrus“ – pokemonus. Norint pagauti pokemoną, būtina į jį mesti kamuoliuką ir pataikyti į ekrane rodomo skritulio vidų.

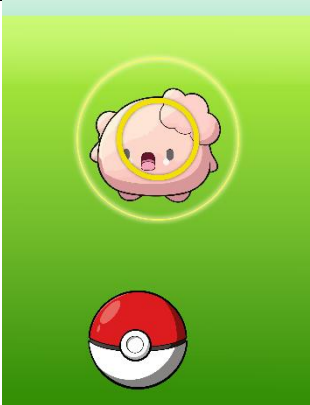
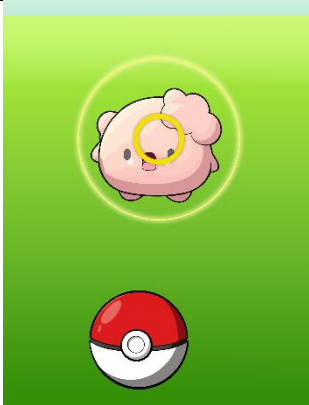


Ar gaudynės bus sėkmingos, priklausys ir nuo to, į kokią skritulio dalį pavyks pataikyti.

Pavyzdžiui, kamuoliukas gali pataikyti į plotą, ribojamą mažesnio apskritimo, esančio didžiojo skritulio centre, kurio spindulys lygus 0,4 didžiojo skritulio spindulio. Žaidime toks skritulys (ir metimas) vadinamas „šauniuoju“ (žr. lentelę). Jei į jį pataikoma, du kartus padidėja tikimybė, kad pokemonas nepabėgs.

Kamuoliukas gali pataikyti į plotą, ribojamą dar mažesnio apskritimo, esančio šauniujo skritulio centre, kurio spindulys lygus 0,2 didžiojo skritulio spindulio. Toks skritulys (ir metimas) vadinamas „puikiuoju“. Tokiu atveju tikimybė, kad pokemonas nepabėgs, padidėja dar du kartus.

Pavadinimas	Šaunusis metimas	Puikusias metimas
-------------	------------------	-------------------

Vizualizacija		
Didžiojo skritulio spindulio dalis	0,4	0,2

Tarkime, žaidėjas yra toks įgudęs, kad su vieneto tikimybe pataiko į didžiojo skritulio vidų, o tikimybė jam pataikyti į bet kurią mažesnę to skritulio dalį yra tiesiogiai proporcinga tos skritulio dalies plotui. Tarkime, kad atskiri žaidėjo metimai vienas nuo kito nepriklauso. Atlikite užduotis ir išnagrinėkite žaidėjo tikimybes pataikyti į mažesnio skritulio dalis.

Užduotys

1 užduotis

Kokia tikimybė, kad žaidėjas atliks puikųjį metimą? Atsakymą pagrįskite.

2 užduotis

Kokia tikimybė, kad žaidėjas atliks šaunųjį metimą, kuris nėra puikusias? Atsakymą pagrįskite.

3 užduotis

Kas labiau tikėtina?

A – „Žaidėjas atliks šaunųjį metimą, bet jis nebus puikusias.“

B – „Žaidėjas pataikys į didžiojo skritulio vidų, tačiau nepataikys šauniojo metimo.“

4 užduotis

Kas labiau tikėtina?

C – „Žaidėjas neatliks šauniojo metimo tris kartus iš eilės.“

D – „Atliekant tris metimus: vienas iš metimų bus puikusias; vienas metimas bus šaunusias, bet nebus puikusias; vienas metimas nebus šaunusias.“

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Tarkime, kad didžiojo skritulio spindulys lygus R. Tada puikiojo metimo skritulio spindulys lygus $0,2R$ (nurodyta įvestyje). Žaidėjas kamuoliuką gali pataikyti į bet kurią skritulio vidaus vietą (tiek didžiojo, tiek puikiojo). Tikimybė pataikyti į bet kurią mažesnę didžiojo skritulio dalį yra tiesiogiai proporcinga tos skritulio dalies plotui, o tikimybė pataikyti į didįjį skritulį lygi vienetui. Vadinasi, tikimybė, kad žaidėjas atliks puikųjį metimą, lygi puikiojo skritulio vidaus ir didžiojo skritulio vidaus plotų santykiui: $P = \frac{S_{\text{puikiojo}}}{S_{\text{didžiojo}}}$	1	Už teisingą pagrindimą, kurio esmė – pasinaudoti tikimybės proporcingumu plotui (t. y. apskaičiuoti geometrinę tikimybę).
$\frac{S_{\text{puikiojo}}}{S_{\text{didžiojo}}} = \frac{\pi(0,2R)^2}{\pi R^2} = \frac{0,04R^2}{R^2} = 0,04$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Kaip ir pirmoje užduotyje, šauniojo metimo tikimybė lygi šauniojo skritulio ir didžiojo skritulio plotų santykiui, tačiau šaunusis skritulys apima puikųjį skritulį, todėl nurodyto metimo tikimybė lygi žiedo tarp šauniojo ir puikiojo apskritimų ploto ir didžiojo skritulio ploto santykiui: $P = \frac{S_{\text{šauniojo}} - S_{\text{puikiojo}}}{S_{\text{didžiojo}}}$ arba $P = \frac{S_{\text{šauniojo}}}{S_{\text{didžiojo}}} - \frac{S_{\text{puikiojo}}}{S_{\text{didžiojo}}}$	2	1 taškas už teisingą pagrindimą, kurio esmė – pasinaudoti tikimybės proporcingumu plotui (t. y. apskaičiuoti geometrinę tikimybę). 1 taškas už atsižvelgimą į tai, kad šauniojo skritulio viduje yra puikusias skritulys.
$\frac{S_{\text{šauniojo}} - S_{\text{puikiojo}}}{S_{\text{didžiojo}}} = \frac{\pi(0,4R)^2 - \pi(0,2R)^2}{\pi R^2} =$ $= \frac{0,16R^2 - 0,04R^2}{R^2} = 0,12$ arba $\frac{S_{\text{šauniojo}}}{S_{\text{didžiojo}}} - \frac{S_{\text{puikiojo}}}{S_{\text{didžiojo}}} = \frac{\pi(0,4R)^2}{\pi R^2} - 0,04 =$ $= \frac{0,16R^2}{R^2} - 0,04 = 0,16 - 0,04 = 0,12$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Jei reikalinga, įrašomas paaiškinimas, kaip skiriami taškai.		

3 užduties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Iš 2 užduties žinome, kad tikimybė žaidėjui atlikti šaunųjį metimą, kuris nėra puikšis, yra lygi $P(A) = 0,12$ Apskaičiuojame įvykio B tikimybę. Ji yra lygi žiedo, ribojamo didžiojo ir šauniojo apskritimų, ploto ir didžiojo skritulio ploto santykiui, t. y. $P(B) = \frac{S_{\text{didžiojo}} - S_{\text{šauniojo}}}{S_{\text{didžiojo}}}$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą, kurio esmė – didžiojo ir šauniojo apskritimų ribojamo žiedo ploto apskaičiavimas.
$\frac{S_{\text{didžiojo}} - S_{\text{šauniojo}}}{S_{\text{didžiojo}}} = \frac{S_{\text{didžiojo}}}{S_{\text{didžiojo}}} - \frac{S_{\text{šauniojo}}}{S_{\text{didžiojo}}} =$ $= 1 - \frac{\pi(0,4R)^2}{\pi R^2} = 1 - 0,16 = 0,84$	1	Už gautą teisingą $P(B)$ reikšmę.
Iš čia seka, kad įvykis B labiau tikėtinas už įvykį A, nes $P(B) = 0,84 > 0,12 = P(A)$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Jeigu pateiktas kitas tinkamas sprendimas ir gautas teisingas atsakymas, skiriami visi taškai.		

4 užduties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Iš 3 užduties žinome tikimybę $P(B)$, kad mesdamas vieną metimą „žaidėjas pataikys į didžiojo skritulio vidų, tačiau nepataikys šauniojo metimo“. Iš įvesties žinome, atskiri žaidėjo atliekami metimai yra vienas nuo kito nepriklausomi, todėl $P(C) = P(B)^3 = 0,84^3 = 0,592704$	1	Už teisingai apskaičiuotą įvykio C tikimybę.
Pažymėkime šaunųjį metimą, kuris nėra puikšis, V (vidutinis), puikųjį metimą – T, o nei šaunųjį, nei puikųjį metimą – I (įprastas). Tuomet galimi 6 deriniai šiems metimams atlikti (įvykiui D palankios baigtys): V, T, I V, I, T T, V, I T, I, V I, V, T I, T, V. Šios baigtys yra nesutaikomieji įvykiai, t. y. šių baigčių tikimybės sumuojasi. Kadangi kiekvieno atskiro metimo baigtis yra nepriklausoma nuo kitų, tai $P(V, T, I) = P(V, I, T) = P(T, V, I) =$ $= P(T, I, V) = P(I, V, T) = P(I, T, V) =$ $= P(V) \cdot P(T) \cdot P(I)$	1	Už teisingą pastebėjimą, kad yra 6 įvykiui D palankios baigtys.
Iš ankstesnių užduočių žinome, kad:	1	Už teisingai apskaičiuotą įvykio D tikimybę.

$P(T) = 0,04$ $P(I) = 0,84$ Todėl $P(V, T, Š) = 0,12 \cdot 0,04 \cdot 0,84 = 0,004032$ Kadangi yra 6 galimi deriniai, tai $P(D) = 6 \cdot P(\text{ŠPI}) = 6 \cdot 0,004032 = 0,024192$		
$P(C) > P(D)$, vadinasi, labiau tikėtina, kad žaidėjas neatliks nei šauniojo, nei puikiojo metimo tris kartus iš eilės.	1	Už padarytą teisingą išvadą.
Pastabos		
Jeigu pateiktas kitas tinkamas sprendimas ir gautas teisingas atsakymas, skiriami visi taškai.		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite, kaip skaičiuojamas skritulio plotas.

2 užuomina. Puikiojo metimo tikimybė proporcinga puikiojo ir didžiojo skritulių plotų santykiui.

3 užuomina. Skritulio, kurio spindulys lygus R , plotas S skaičiuojamas taip: $S = \pi R^2$.

2 užduotis

1 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad puikysis skritulys yra šauniojo skritulio viduje.

2 užuomina. Apskaičiuokite žiedo, ribojamo šauniojo ir puikiojo skritulių kraštų, plotą.

3 užduotis

1 užuomina. Įvykiui A apskaičiuoti pasinaudokite 2 užduoties rezultatu.

2 užuomina. Apskaičiuokite žiedo, ribojamo didžiojo ir šauniojo skritulių kraštų, plotą.

4 užduotis

1 užuomina. Įvykiui C apskaičiuoti pasinaudokite įvykio B tikimybe.

2 užuomina. Prisiminkite, kad atskiri žaidėjo atliekami metimai yra vienas nuo kito nepriklausomi.

3 užuomina. Kiek baigčių yra palankių įvykiui D?

Metaduomenys

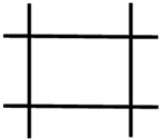
Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	IV gimnazijos	Duomenys ir tikimybės	Išplėstinis	Klasikiniai ir neklasikiniai tikimybiniai modeliai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Klasikiniai ir neklasikiniai tikimybiniai modeliai	Matematinis problemų sprendimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Pagrindinis	3
3				Klasikiniai ir neklasikiniai tikimybiniai modeliai	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Pagrindinis	3
4				Klasikiniai ir neklasikiniai tikimybiniai modeliai	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	4

Stačiakampių skaičius

Bendroji įvestis

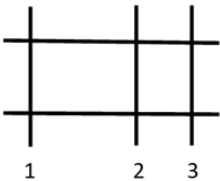
Nagrinėsime brėžinius, kuriuose dvi ar daugiau lygiagrečių tiesių kerta tam tikras skaičius joms statmenų tiesių. Reikės apskaičiuoti, kiek skirtingų stačiakampių susidaro šiuose brėžiniuose. Išstudijuokite du pavyzdžius.

1 pavyzdys. Nagrinėjame brėžinį, kuriame dvi lygiagrečias tieses kerta kitos dvi joms statmenos tiesės:

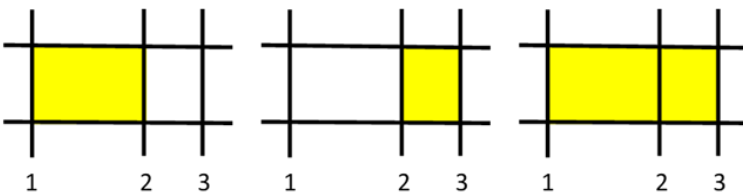


Šiuo atveju brėžinyje susidaro tik vienas stačiakampis, kurio visos keturios kraštinės yra duotų tiesių dalis.

2 pavyzdys. Nagrinėjame brėžinį, kuriame dvi lygiagrečias tieses kerta trys joms statmenos tiesės, pažymėtos skaičiais 1, 2 ir 3:



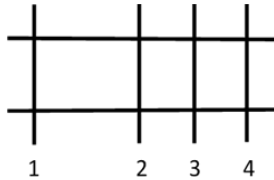
Šiuo atveju brėžinyje susidaro trys skirtingi geltonai nuspalvinti stačiakampiai:



Užduotys

1 užduotis

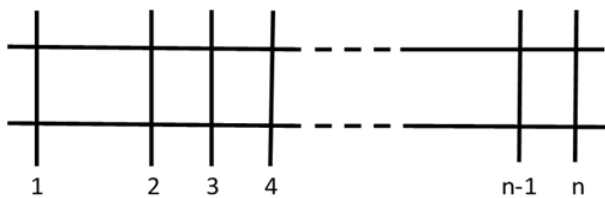
Išnagrinėkite brėžinį, kuriame dvi lygiagrečias tieses kerta keturios joms statmenos tiesės, sunumeruotos skaičiais 1, 2, 3 ir 4:



Kiek skirtingų stačiakampių sudaro šiame brėžinyje pavaizduotos tiesės? Atsakymą paaiškinkite.

2 užduotis

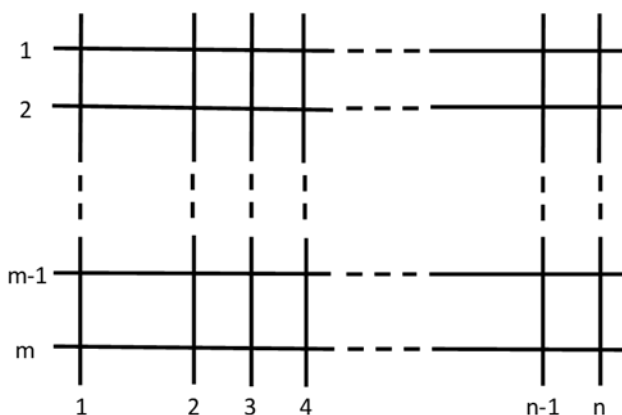
Dvi lygiagrečias tieses kerta n ($n \geq 4$) joms statmenų tiesių, sunumeruotų skaičiais 1, 2, ..., $n - 1$, n , taip, kaip schematiškai pavaizduota brėžinyje:



Įrodykite, kad šiuo atveju brėžinyje susidaro $\frac{n(n-1)}{2}$ skirtingų stačiakampių.

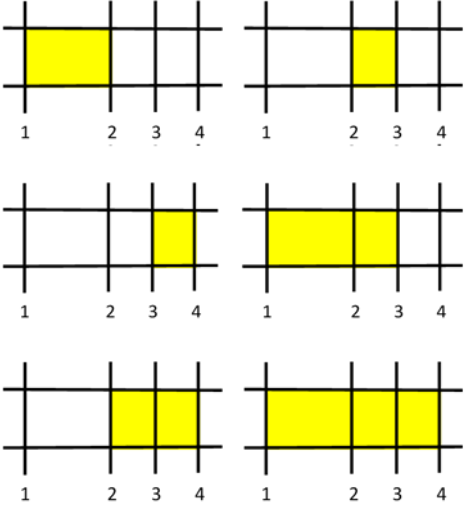
3 užduotis

Plokštumoje yra m lygiagrečių tiesių, kurias kerta n joms statmenų tiesių taip, kaip schematiškai pavaizduota brėžinyje:



Apskaičiuokite, kiek brėžinyje susidaro skirtingų stačiakampių.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	1	
Susidaro šeši toliau pavaizduoti stačiakampiai:  Ats.: 6	1	Už teisingai paaiškindantį atsakymą, kad tikrai susidaro 6 skirtingi stačiakampiai.
Pastabos		
Taškas skiriamas ir neparodžius, kad skirtingų stačiakampių skaičius neviršija 6.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Atkreipkime dėmesį, kad kiekvieną užduoties sąlygoje minimą stačiakampį vienareikšmiškai apibrėžia dviejų sunumeruotų vertikalių tiesių, kuriose yra jo kraštinės, rinkinys. Pvz., yra tik vienas stačiakampis, kurio kraštinės yra 1 ir 2 tiesėse. Nėra svarbu, kokia tvarka pasirinksite 2 tieses, apibrėžiančias nagrinėjamą stačiakampį. Išvada: skirtingų stačiakampių yra tiek, kiek iš n tiesių galima sudaryti derinių po 2. Derinių skaičius iš n elementų po 2 yra: $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$	1	Už teisingą pastebėjimą, kad skirtingų stačiakampių skaičius yra lygus derinių iš n elementų po 2 skaičiui.
	1	Už teisingai apskaičiuotą atsakymą.
Pastabos		
Jei teisingai kitu būdu parodoma, kad stačiakampių skaičius yra lygus $\frac{n(n-1)}{2}$, skiriami 2 taškai. Pvz., jei ši formulė išvedama taikant matematinę indukciją, 1 taškas skiriamas už pirmąjį indukcijos žingsnį ir 1 taškas už antrąjį indukcijos žingsnį.		

Kitas galimas būdas išvesti formulę – taikyti aritmetinės progresijos narių sumos formulę. Tada 1 taškas skiriamas už paaiškinimą, kaip pritaikyti aritmetinės progresijos narių sumos formulę, ir 1 taškas – už teisingai pritaikytą sumos formulę.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Atkreipkime dėmesį, kad kiekvieną užduoties sąlygoje minimą stačiakampį vienareikšmiškai apibrėžia 2 tiesių rinkiniai – dviejų sunumeruotų vertikalių tiesių, kurių dalis yra stačiakampio vertikalios kraštinės, rinkinys ir dviejų sunumeruotų horizontalių tiesių, kurių dalis yra stačiakampio horizontalios kraštinės, rinkinys. Pvz., yra tik vienas stačiakampis, kurio kraštinės yra horizontalių tiesių 1 ir 2 ir vertikalių tiesių 2 ir 3 dalis. Nėra svarbu, kokia tvarka pasirinksi 2 horizontalias ar 2 vertikalias tieses, apibrėžiančias nagrinėjamą stačiakampį. Skirtingų stačiakampių skaičių lemia derinių iš 2 horizontalių ir 2 vertikalių tiesių skaičius.	1	Už teisingą pastebėjimą, kad skirtingų stačiakampių skaičių lemia derinių iš 2 horizontalių ir 2 vertikalių tiesių skaičius.
Galima pritaikyti kombinatorikos daugybos taisyklę. Skirtingų stačiakampių skaičius gaunamas sudauginus derinių iš 2 horizontalių ir 2 vertikalių tiesių skaičių.	1	Už teisingą pastebėjimą, kad galima taikyti kombinatorikos daugybos taisyklę ir derinių skaičius sudauginti.
Ats.: $C_m^2 \cdot C_n^2$	1	Už gautą teisingą atsakymą, pateiktą bet kuriuo ekvivalenčiu pavidalu. Pvz., tinkami atsakymai yra: $C_n^2 \cdot C_m^2;$ $\frac{n! \cdot m!}{4 \cdot (n-2)! \cdot (m-2)!};$ $\frac{n \cdot (n-1) \cdot m \cdot (m-1)}{4}.$
Pastabos		
Jei kitu būdu gaunamas teisingas atsakymas, skiriami 3 taškai.		
Jei sprendžiant neužsimenama apie kombinatorikos daugybos taisyklę, nors tuo remiamasi, bendras įvertinimas mažinamas 1 tašku.		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Pabandykite atskirai skirtingose brėžinio kopijose nuspalvinti visus stačiakampius, kuriuos reikia suskaičiuoti.

2 užuomina. Pagalvokite, kiek brėžinyje yra skirtingų stačiakampių, kurių nekerta nė viena tiesė.

3 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kiek brėžinyje yra skirtingų stačiakampių, kuriuos kerta viena arba dvi tiesės.

2 užduotis

1 užuomina. Kiekvieną užduoties sąlygoje minimą stačiakampį vienareikšmiškai apibrėžia sunumeruotų vertikalių tiesių, kuriose yra jo kraštinės, pora. Pavyzdžiui, jeigu pasirenkate tieses su numeriais 2 ir 4, tai yra vienas (ir tik vienas) stačiakampis, kurio vertikalios kraštinės yra tiesių 2 ir 4 dalis.

2 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad skirtingų stačiakampių skaičius sutampa su derinių iš n elementų po 2 skaičiumi.

3 užduotis

1 užuomina. Kiekvieną užduoties sąlygoje minimą stačiakampį vienareikšmiškai apibrėžia dvi tiesių poros – sunumeruotų vertikalių tiesių, kurių dalis yra vertikalios stačiakampio kraštinės, pora ir sunumeruotų horizontalių tiesių, kurių dalis yra horizontalios stačiakampio kraštinės, pora.

2 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad skirtingų stačiakampių skaičių lemia derinių iš dviejų horizontalių ir dviejų vertikalių tiesių skaičius.

3 užuomina. Galima pritaikyti kombinatorikos daugybos taisyklę. Skirtingų stačiakampių skaičius gaunamas padauginus visų galimų derinių iš dviejų horizontalių tiesių skaičių iš visų galimų derinių iš dviejų vertikalių tiesių skaičiaus.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrūpis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Duomenys ir tikimybės	Išplėstinis	Rinkiniai: kėliniai, gretiniai, deriniai	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Patenkinamas	1
2					Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	2
3					Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	3

Nesimetriška moneta

Bendroji įvestis

Įsivaizduokime, kad buvo pagaminta neįprasta, nesimetriška moneta. Ji turi dvi puses, tačiau tikimybė, kad atvirs skaičius, yra $\frac{1}{3}$, o tikimybė, kad atvirs herbas, yra $\frac{2}{3}$.

Tokios monetos mėtymas – neklasikinis tikimybinis bandymas, kadangi ne visų baigčių tikimybės vienodos.



Šaltinis. [Shutterstock](#), ID: 424738894.

Užduotys

1 užduotis

Sakykime, moneta metama 2 kartus. Nagrinėsime atsitiktinį dydį, kiek kartų atvirto skaičius, atliekant tokį tikimybinį bandymą. Sudarykite šio atsitiktinio dydžio skirstinio lentelę.

2 užduotis

Kam lygi tikimybė, kad metant monetą 3 kartus, skaičius atvirs 3 kartus iš eilės?

Kam lygi tikimybė, kad metant monetą n kartų, n kartų atvirs skaičius, kai n – natūralusis skaičius?

3 užduotis

Kuris įvykis yra labiau tikėtinas: kad iš 3 metimų atvirs bent 1 skaičius ar kad iš 1 metimo atvirs herbas? Apskaičiuokite ir palyginkite šias tikimybes.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas											
Sprendimas ir/arba atsakymas		Taškai	Taškų paaiškinimas								
		4									
Pirmiausia apskaičiuosime tikimybę įvykio, kad atsitiktinis dydis „kiek kartų atvirto skaičius“ įgis reikšmę 2. Kadangi monetos metimai yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, todėl tikimybės, kad pirmąjį kartą atvirs skaičius ir kad antrąjį kartą atvirs skaičius, reikia sudauginti: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$		1	Už gautą teisingą tikimybę, kad skaičius atvirto 2 kartus.								
Toliau apskaičiuosime tikimybę įvykio, kad atsitiktinis dydis „kiek kartų atvirto skaičius“ įgis reikšmę 1. Įvykis, kad „skaičius atvirs tik 1 kartą“ sudarytas iš 2 nesutaikomųjų įvykių: „skaičius atvirto tik metant monetą pirmąjį kartą“ ir „skaičius atvirto tik metant monetą antrąjį kartą“. Įvykiai yra nesutaikomieji, todėl jų tikimybės reikia sudėti. Įvykio „herbas atvirto tik metant monetą pirmąjį kartą“ tikimybė yra lygi įvykio „herbas atvirto tik metant monetą antrąjį kartą“ tikimybei ir lygi: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$ Tikimybė, kad atsitiktinis dydis „kiek kartų atvirto skaičius“ įgis reikšmę 1 lygi: $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$		1	Už gautą teisingą tikimybę, kad skaičius atvirto tik 1 kartą.								
Dabar apskaičiuosime tikimybę įvykio, kad atsitiktinis dydis „kiek kartų atvirto skaičius“ įgis reikšmę 0. Kadangi monetos metimai yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, tikimybės, kad pirmąjį kartą neatvirs skaičius ir kad antrąjį kartą neatvirs skaičius reikia sudauginti : $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$		1	Už gautą teisingą tikimybę, kad skaičius atvirto 0 kartų.								
<table><tr><td>Atsitiktinio dydžio reikšmė</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>Tikimybė</td><td>$\frac{4}{9}$</td><td>$\frac{4}{9}$</td><td>$\frac{1}{9}$</td></tr></table>		Atsitiktinio dydžio reikšmė	0	1	2	Tikimybė	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1	Už teisingai sudarytą skirstinio lentelę.
Atsitiktinio dydžio reikšmė	0	1	2								
Tikimybė	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$								

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Kadangi monetos metimai yra tarpusavyje nepriklausomi, tai įvykio „metant monetą 3	1	Už gautą teisingą atsakymą ($\frac{1}{27}$).

kartus, atvirto skaičius, skaičius ir skaičius“ tikimybė: $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.		
Kadangi: • kiekvienas metimas yra nepriklausomas, • kiekvieno metimo sėkmės tikimybė yra $\frac{1}{3}$, • tikimybė, kad visi įvykiai įvyks vienu metu, yra visų jų tikimybių sandauga. Todėl „monetą metant n kartų, visus n kartų atvirto skaičius“ tikimybė: $\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą $\left(\frac{1}{3^n}\right)$.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Pirmasis samprotavimo būdas. Tikimybė, kad iš 3 metimų atvirs bent vienas skaičius, lygi sumai 3 nesutaikomųjų įvykių tikimybių (kad atvirs skaičius iš pirmojo metimo; kad iš pirmojo neatvirs, tačiau atvirs iš antrojo; kad iš pirmųjų dviejų neatvirs, tačiau atvirs iš trečiojo): $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$ Antrasis samprotavimo būdas. Įvykiui „iš 3 metimų atvirs bent skaičius“ priešingas įvykis yra „iš 3 metimų neatvirs nė vienas skaičius“. Tikimybė, kad 1 kartą metant nesimetrišką monetą neatvirs skaičius, lygi $\frac{2}{3}$. Todėl tikimybė, kad iš 3 metimų atvirs bent vienas skaičius, lygi 1 minus tikimybė, kad neatvirs nė vienas skaičius: $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (teisingai sudarytą tikimybės reiškinį).
$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{9 + 6 + 4}{27} = \frac{19}{27}$ Arba $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{27}{27} - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$	1	Už apskaičiuotą teisingą atsakymą (pirmojo įvykio tikimybę).
$\frac{19}{27} > \frac{2}{3}$ (pirmojo įvykio tikimybė didesnė).	1	Už gautą teisingą atsakymą (kurio įvykio tikimybė didesnė).

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Pirmiausia nustatykite visas galimas šio bandymo baigtis, kai moneta metama 2 kartus. Kiekvieno metimo baigtys yra nepriklausomos, todėl visos baigtys susidaro iš 2 simbolių (pvz., „HH“, „HS“ ir t. t.). Kiek kartų kiekvienoje baigtyje atvirto skaičius?

2 užuomina. Kiek yra baigčių, kuriose skaičius atvirsta lygiai kartą? Pasinaudokite šiomis baigtimis ir žinomomis tikimybėmis, kad apskaičiuotumėte šios reikšmės tikimybę.

3 užuomina. Kai apskaičiuosite visas atsitiktinio dydžio reikšmių tikimybes, sudarykite lentelę ir nurodykite tikimybę kiekvienam atvirtusių herbų skaičiui. Atkreipkite dėmesį; jei užduotis atlikta teisingai, tikimybių suma turi būti lygi vienetui (arba 100 %).

2 užduotis

1 užuomina. Įvykio „metant monetą 3 kartus, atvirto skaičius, skaičius ir skaičius“ tikimybė gaunama sudauginant kiekvieno iš įvykių „metant monetą atvirto skaičius“ tikimybę.

2 užuomina. Įvykio „monetą metant n kartų, visus n kartų atvirto skaičius“ tikimybė taip pat gaunama sudauginant kiekvieno iš šių įvykių tikimybę. Jei tikimybė atvirsti skaičiui lygi $\frac{1}{3}$, kam tuomet lygi tikimybė, kad n kartų iš eilės atvirs skaičius, metant monetą n kartų? Atsakymą užrašykite laipsnine funkcija.

3 užduotis

1 užuomina. Nustatykite, kam lygi tikimybė, kad pirmuoju metimu atvirs skaičius. Tai mums palanki baigtis, nepriklausomai nuo to, kas atvirstų vėliau.

2 užuomina. Nustatykite, kam lygi tikimybė, kad pirmuoju metimu atvirto herbas, tačiau antruoju metimu atvirto skaičius. Tai mums palanki baigtis, nepriklausomai nuo to, kas atvirs vėliau.

3 užuomina. Apskaičiuokite, kam lygi tikimybė, kad pirmuoju metimu atvirto herbas, antruoju metimu irgi atvirto herbas, tačiau trečiuoju metimu atvirto skaičius.

4 užuomina. Sudėkite visas apskaičiuotas tikimybes. Palyginkite su tikimybe, kad iš vieno metimo atvirs herbas.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Duomenys ir tikimybės	Išplėstinis	Klasikiniai ir neklasikiniai tikimybiniai modeliai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	4
2				Klasikiniai ir neklasikiniai tikimybiniai modeliai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	2
3				Klasikiniai ir neklasikiniai tikimybiniai modeliai	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	3

Klasikinė moneta

Bendroji įvestis

Klasikinė moneta turi dvi puses. Tikimybė atvirsti skaičiui yra $1/2$, tikimybė atvirsti herbui – taip pat $1/2$.

Metant tokią monetą, atliekamas klasikinis tikimybinis bandymas, nes visų baigčių tikimybės vienodos.



Šaltinis: [Shutterstock](#), ID: 424738894.

Apibrėžkime tikimybę P :

$$P_n^k = P(\text{herbas iškrito } k \text{ kartų iš } n \text{ metimų}).$$

Užduotys

1 užduotis

Apskaičiuokite šias tikimybes:

- Metant monetą 2 kartus herbas iškrito 1 kartą (t. y. P_2^1).
- Metant monetą 2 kartus herbas iškrito bent 1 kartą (t. y. $P_2^1 + P_2^2$).

2 užduotis

Apskaičiuokite tikimybę, kad metant monetą 10 kartų, herbas iškrito 2 kartus (t. y. P_{10}^2).

3 užduotis

Įrodykite, kad su $n \geq 2$ galioja lygybė

$$P_n^1 = 2n \cdot P_{n+1}^0.$$

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Jei mesime monetą 2 kartus, iš viso turėsime 4 galimas baigtis, iš jų dviem atvejais moneta herbu atvirto po vieną kartą. Todėl: $P_2^1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$	1	Už teisingai apskaičiuotą tikimybę.
Jei mesime monetą 2 kartus, iš viso turėsime 4 galimas baigtis, iš jų trimis atvejais moneta herbu atvirto bent vieną kartą. Todėl: $P_2^1 + P_2^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$	1	Už teisingai apskaičiuotą tikimybę.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Būdų išdėlioti dvi monetas dešimtyje pozicijų: $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$	1	Už teisingai apskaičiuotą derinių skaičių.
Skirtingų baigčių: $2^{10} = 1024.$	1	Už teisingai apskaičiuotą baigčių skaičių.
$P_{10}^2 = \frac{45}{1024}.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Remiantis binominio skirstinio formule: $P_{n+1}^0 = \frac{C_{n+1}^0}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$	1	Už teisingai užrašytą P_{n+1}^0 .
Remiantis binominio skirstinio formule: $P_n^1 = \frac{C_n^1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2^n}$	1	Už teisingai užrašytą P_n^1 .
$2n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2^n}, \text{ todėl lygybė įrodyta.}$	1	Už parodymą, kad gautų reiškinių lygybė galioja.
Pastabos		
Įrodymas indukcijos būdu taip pat tinka. Tuomet pirmieji du taškai skiriami taip pat, o trečiasis – už teisingą indukcijos įrodymą.		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Jei du kartus mesite monetą, bus lygiai keturios galimos baigtys. Galite situaciją vizualizuoti ir suskaičiuoti atsakymą taip: keliais atvejais iš visų baigčių iškrito po vieną herbą?

2 užuomina. Jei metant du kartus bent vieną kartą iškrito herbas, vadinasi, herbas galėjo iškristi vieną arba du kartus. Kokia tikimybė, kad metant du kartus herbas iškris du kartus? Pridėkite šią tikimybę prie tikimybės, kad herbas iškris vieną kartą, ir gausite tikimybę, kad herbas iškrito bent vieną kartą.

2 užduotis

1 užuomina. Jei monetą metėte 10 kartų, kiek iš viso yra galimų baigčių?

2 užuomina. Jei dvi monetas reikia išdėlioti dešimtyje pozicijų, keliais skirtingais būdais galima tai padaryti?

3 užuomina. Raskite santykį tarp dviejų monetų išdėliojimo būdų dešimtyje pozicijų ir metant monetas 10 kartų galimų visų baigčių skaičiaus. Tai ir yra jūsų ieškoma tikimybė.

3 užduotis

1 užuomina. Pasinaudokite binominio skirstinio formule ir užrašykite, kam lygu P_{n+1}^0 . Jeigu visos monetos iškrito skaičiumi iš $n+1$ metimų, kokia šio įvykio tikimybė?

2 užuomina. Pasinaudokite binominio skirstinio formule. P_n^1 . Jeigu iš n metimų vieną kartą iškrito herbas, kokia šio įvykio tikimybė?

3 užuomina. Įsistatykite gautus dydžius į tikrinamą savybę ir parodykite, kad lygybė galioja.

Metaduomenys

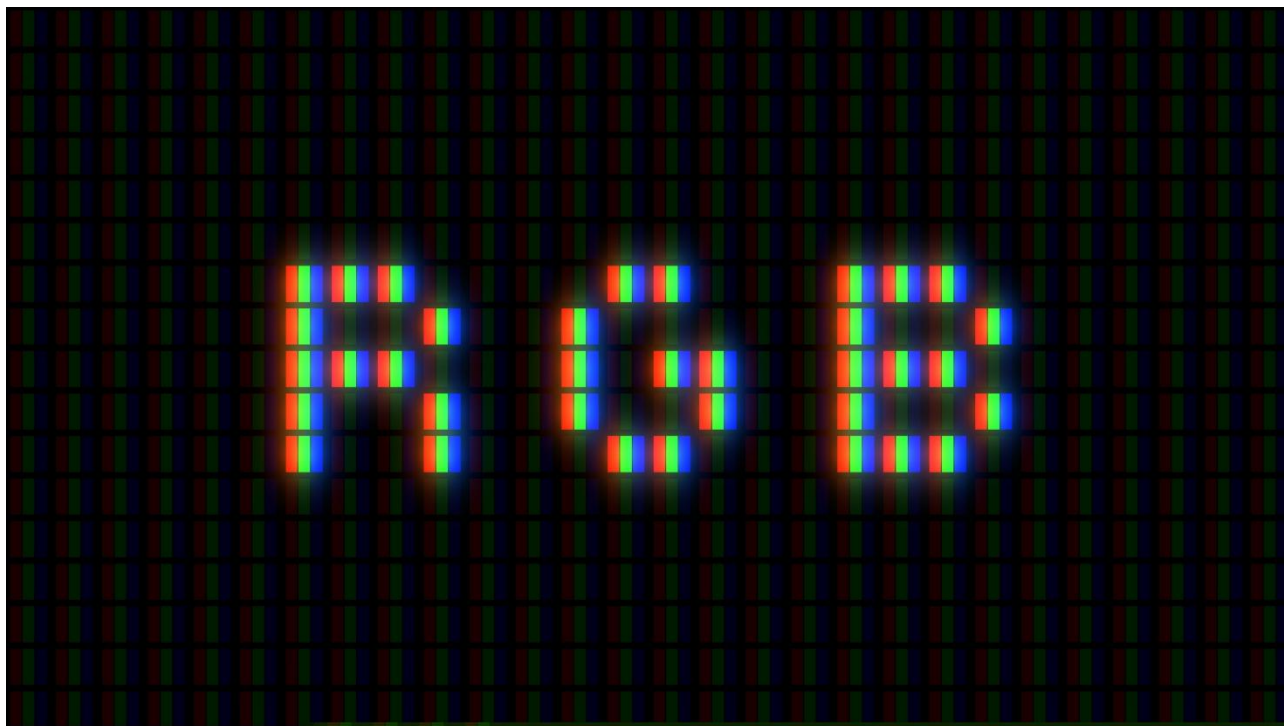
Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Duomenys ir tikimybės	Išplėstinis	Rinkiniai, kėliniai, gretiniai, deriniai	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Rinkiniai, kėliniai, gretiniai, deriniai	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3
3				Rinkiniai, kėliniai, gretiniai, deriniai	Loginis mąstymas ir įrodymai	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	3

Pikseliai

Bendroji įvestis

Skirtingais santykiais maišant raudoną, žalią ir mėlyną (angl. *red*, *green*, *blue* – RGB) spalvas, galima sukurti bet kurią kitą spalvą. Pavyzdžiui, jei vienodu intensyvumu šviesinsime raudoną ir žalią spalvas, tačiau beveik nenaudosime mėlynos – gausime geltonus atspalvius.

RGB spalvų sistema dažnai naudojama kompiuterių ir išmaniųjų įrenginių ekranams. Tarkime, kad turime iš RGB pikselių pagamintą ekraną, kurio kiekvienas pikselis sudarytas iš trijų mikroskopinio dydžio juostelių: raudonos, žalios ir mėlynos.



Šaltinis: [Shutterstock](#), ID: 2505147595.

Išsaugojus paveikslą telefone ar kompiuteryje, į atmintį įrašomos jo pikselių RGB reikšmės.

Kiekvienos iš trijų pikselio juostų intensyvumui aprašyti skiriami 8 bitai atminties (1 bitas – tai mažiausias informacijos kiekio vienetas kompiuteryje). Tai reiškia, kad yra 2^8 būdų parinkti kiekvienos iš trijų spalvų intensyvumą. Kitaip sakant, kiekvienos iš trijų spalvų ryškumas pikselyje yra koduojamas sveikuoju skaičiumi iš intervalo $[0, 255]$.

Užduotys

1 užduotis

Kiek skirtingų spalvų kombinacijų galima sudaryti viename pikselyje? Atsakymą pateikite kaip skaičių 2 su sveikuoju laipsniu.

2 užduotis

Vienas pikselis kompiuteryje užima 24 bitus atminties. Kiek vietos užims paveikslas, kurio dydis yra 1280×720 pikselių?

Atsakymą pateikite kilobaitais (KB). (1 KB = 1024 baitai, 1 baitas = 8 bitai.)

3 užduotis

Kai kurie paveikslų formatai turi tris spalvas ir papildomą parametrą – permatomumą. Pavyzdžiui, kai kurie pikseliai gali dalinai persišviesti ir tam tikru ryškumu rodyti už jų esantį vaizdą.

Tarkime, permatomumo lygiui aprašyti kiekvienam pikseliui skiriama dar po 8 bitus papildomos atminties. Apskaičiuokite, kiek bitų atminties užima vienas permatomas pikselis.

Dalinai permatomos nuotraukos ilgis yra x pikselių, o aukštis dvigubai mažesnis už ilgį (ir ilgio, ir pločio pikselių kiekiai yra sveikieji skaičiai). Kam bus lygi tokios nuotraukos pikselių užimama atmintis? Atsakymą pateikite megabaitais (MB). (1 MB = 1024 KB, 1 KB = 1024 baitai, 1 baitas = 8 bitai).

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
$256 \cdot 256 \cdot 256$ arba $2^8 \cdot 2^8 \cdot 2^8$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą pritaikyti kombinatorinę daugybos taisyklę.
Ats.: 2^{24} .	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Pikselių užimama atmintis (bitais): $24 \cdot 1280 \cdot 720$.	1	Už teisingą apskaičiavimą, kiek vietos užima visi paveikslo pikseliai.
Kiek vienas kilobaitas turi bitų: $8 \cdot 1024$.	1	Už teisingą apskaičiavimą, kiek 1 kilobaitė yra bitų.
$\frac{24 \cdot 1280 \cdot 720}{8 \cdot 1024} = \frac{22118400}{8192} = 2700 \text{ KB}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Apskaičiuojame, kiek bitų užima 1 pikselis: $24 + 8 = 4 \cdot 8 = 32$.	1	Už teisingą apskaičiavimą, kiek vietos užima vienas dalinai permatomas pikselis.
Paveikslo pikselių užimama atmintis bitais: $32 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 16 \cdot x^2$.	1	Už teisingą apskaičiavimą, kiek pikselių yra viename paveiksle.
Apskaičiuojame, kiek 1 MB turi bitų: $8 \cdot 1024 \cdot 1024$.	1	Už teisingą apskaičiavimą, kiek 1 megabaitė yra bitų.
Todėl paveikslo dydis megabaitais yra: $\frac{16 \cdot x^2}{8 \cdot 1024 \cdot 1024} = \frac{x^2}{524288}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite kombinatorinę daugybos taisyklę. Pagalvokite, jei vienai spalvai pasirinkti yra 256 (arba 2^8) būdai, kiek yra būdų pasirinkti trims spalvoms?

2 užuomina. Atsakymą užrašykite dvejetainiu, t. y. pavidalu 2^n su kažkoku skaičiumi n .

2 užduotis

1 užuomina. Paveikslai kompiuteryje saugomi kaip stačiakampiai. Prisiminkite stačiakampio ploto formulę, ją pritaikykite ir apskaičiuokite, kiek pikselių yra paveiksle.

2 užuomina. Žinote vieno pikselio užimamą atminties kiekį ir pikselių skaičių. Kaip galima rasti visų pikselių užimamą atminties kiekį?

3 užuomina. Apskaičiuokite, kiek viename kilobaite yra bitų. Pateikite atsakymą kilobaitais.

3 užduotis

1 užuomina. Nustatykite, kiek vietos užima vienas permatomas pikselis, jei kiekvienai iš trijų RGB spalvų skiriama po 8 bitus atminties, o permatomumui aprašyti papildomai skiriami dar 8 bitai atminties.

2 užuomina. Jeigu stačiakampio ilgis x , o aukštis dvigubai didesnis, kaip galima užrašyti stačiakampio plotą?

3 užuomina. Žinote vieno pikselio užimamą atminties kiekį ir pikselių skaičių. Kaip galima rasti visų pikselių užimamą atminties kiekį?

4 užuomina. Apskaičiuokite, kiek viename megabaite yra bitų. Pateikite atsakymą megabaitais.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Duomenys ir tikimybės	Išplėstinis	Rinkiniai: kėliniai, gretiniai, deriniai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2				Rinkiniai: kėliniai, gretiniai, deriniai	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3
3				Rinkiniai: kėliniai, gretiniai, deriniai	Gilus supratimas ir argumentavimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	4

Kompiuteriniai žaidimai ir sportas

Bendroji įvestis

Norint sužinoti, kaip dažnai moksleiviai žaidžia kompiuterinius žaidimus ir kaip dažnai sportuoja, mokykloje buvo atliktas tyrimas. Užduotyse pateikiami tyrimo duomenys.



Užduotys

1 užduotis

Tyrime dalyvavo 20 mokinių. Jų buvo paklausta, kiek valandų per savaitę jie praleidžia žaisdami kompiuterinius žaidimus. Apklausos rezultatai pateikti atsakymų dažnių lentelėje.

Žaidimo laikas (valandos per savaitę)	Mokinių skaičius
0	3
1	2
2	6
3	1
4	4
5 ir daugiau	4

Nustatykite duomenų pasiskirstymo modą.

Apskaičiuokite duomenų medianą.

Paaiškinkite, kodėl šioje situacijoje neįmanoma apskaičiuoti vidurkio.

2 užduotis

Atlikus tos pačios 20 mokinių **imties** apklausą, buvo siekiama išsiaiškinti, kiek valandų per savaitę jie sportuoja. Apklausos rezultatai pateikti dažnių lentelėje.

Sporto valandos per savaitę	Mokinių skaičius
0	4
1	3
2	8
3	5
Suma	20

Apskaičiuokite duomenų vidurkį.

Apskaičiuokite duomenų dispersiją. Atsakymą pateikite trijų reikšminių skaitmenų tikslumu.

Apskaičiuokite duomenų standartinį nuokrypį ir atsakymą pateikite trijų reikšminių skaitmenų tikslumu. Paaiškinkite, ką šiuo atveju standartinis nuokrypis pasako apie duomenis.

Primename sąvokas.

Dispersija = $(\text{reikšmės} - \text{vidurkis})^2 \cdot \text{tikimybė}$, ir visų tokių sandaugų suma.

Standartinis nuokrypis = dispersijos kvadratinė šaknis.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Iš lentelės matome, kad dažniausiai pasikartojanti reikšmė yra 2 valandos per savaitę, nes šią reikšmę pasirinko 6 mokiniai. Ats.: moda yra 2 valandos.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Imtyje turime 20 elementų (lyginis skaičius), todėl mediana yra dviejų vidurinių reikšmių vidurkis, t. y. 10-oji ir 11-oji reikšmės. Abi šios reikšmės yra 2. Ats.: mediana yra 2 valandos.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Vidurkio apskaičiuoti negalima, nes duomenys apie atsitiktinį dydį neišsamūs, duomenų rinkinyje yra atvira kategorija („5 ir daugiau“).	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	6	
Vidurkį apskaičiuojame pagal formulę: $\frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 5}{20}$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (vidurkiui apskaičiuoti).
Vidurkis lygus $\frac{34}{20} = 1,7$.	1	Už gautą teisingą atsakymą (vidurkį).
Dispersiją apskaičiuojame pagal formulę: $\frac{4(0 - 1,7)^2 + 3(1 - 1,7)^2 + 8(2 - 1,7)^2 + 5(3 - 1,7)^2}{20 - 1}$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (dispersijai apskaičiuoti).
Dispersija apytiksliai lygi 1,17.	1	Už gautą teisingą atsakymą (dispersiją).
Standartinis nuokrypis lygus: $\sqrt{1,17} \approx 1,08$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (standartiniam nuokrypiui apskaičiuoti).
Standartinis nuokrypis parodo, kiek duomenys yra išsibarstę aplink vidurkį. Kuo mažesnė ši reikšmė, tuo labiau visi duomenys susitelkę apie vidurkį, o kuo didesnė – tuo labiau jie išsibarstę. Šiuo atveju išsibarstę maždaug vienetu aplink vidurkį.	1	Už teisingą išvadą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite, kad moda – tai dažniausiai pasikartojanti reikšmė. Pagal dažnių lentelę nustatykite, kuris valandų skaičius buvo pasirinktas dažniausiai.

2 užuomina. Prisiminkite, kad medianą galima nustatyti tokiu būdu: visą imtį išrašius didėjimo tvarka, mediana yra lygi viduriniam jos nariui (jeigu imties dydis yra nelyginis skaičius) arba dviejų vidurinių narių aritmetiniam vidurkiui (jeigu imties dydis yra lyginis skaičius).

3 užuomina. Pažvelkite į sąlygoje pateiktą lentelę – ar joje visi atsakymai yra žinomi skaičiai? Tam, kad galėtumėte apskaičiuoti vidurkį, turite tiksliai žinoti, kiek valandų kiekvienas apklausos dalyvis žaidžia per savaitę. Pagal tai padarykite išvadą, ar šiuo atveju įmanoma apskaičiuoti vidurkį.

2 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite visų 20 moksleivių sporto valandų per savaitę aritmetinį vidurkį. Atkreipkite dėmesį, kiek kartų pasikartoja kiekvienas atsakymas.

2 užuomina. Pritaikykite dispersijos formulę. Į ją įsistatykite nustatytą vidurkio reikšmę, taip pat lentelėje duotus dydžius. Atkreipkite dėmesį, kad skaičiuojant imties dispersiją, jos vardiklyje iš imties dydžio turime atimti vienetą.

3 užuomina. Pagalvokite, kokia taisyklė sieja standartinį nuokrypį ir dispersiją. Pagal ją apskaičiuokite standartinį nuokrypį. Paaiškinkite, ką apie šią imtį rodo gautas dydis – kokia sąsaja tarp imties vidurkio ir standartinio nuokrypio?

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Duomenys ir tikimybės	Išplėstinis	Įvadas į statistinę duomenų analizę	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	3
2				Įvadas į statistinę duomenų analizę	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Aukštesnysis	6

Veidrodiniai skaičiai

Bendroji įvestis

Kai kurių skaičių skaitmenų seka skaitoma vienodai tiek iš kairės į dešinę, tiek iš dešinės į kairę. Tokie skaičiai vadinami **veidrodiniais** arba **palindrominiais**. Pavyzdžiui, skaičiai **121**, **1331**, **12321**, **909**, **7** yra veidrodiniai.

Šie skaičiai gali būti įvairaus ilgio – nuo vienaženklio iki daugiaženklio. Nagrinėsime **natūraliuosius veidrodinius skaičius**, jų dėsningumus, sandarą ir savybes.

Užduotys

1 užduotis

Kiek yra skirtingų **dviženklių** veidrodinių skaičių? Paaiškinkite savo samprotavimus.

2 užduotis

Įrodykite, kad kiekvienas **keturženklis** veidrodinis skaičius yra dalus iš 11.

3 užduotis

Sudarykite bendrą formulę, kaip suskaičiuoti visus veidrodinius skaičius, turinčius n skaitmenų (kai $n \geq 1$).

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
Dviženkliai veidrodiniai skaičiai turi formą aa, kur a skaitmuo, t. y. jų abu skaitmenys vienodi: 11, 22, ..., 99. Galimi skaitmenys $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ 0 netinka, nes skaičius negali prasidėti nuliu. Ats.: 9 skaičiai.	1	Už teisingą atsakymą ir paaiškinimą, kodėl tai veidrodiniai skaičiai.
Pastabos		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Keturženklis veidrodinis skaičius yra abba, kur a ir b skaitmenys: $a \in \{1-9\}$ $b \in \{0-9\}$ Šį skaičių galima užrašyti suma: $1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b$ Pastebėjime: $1001 = 11 \cdot 91$ $110 = 11 \cdot 10$ $\rightarrow 1001a + 110b = 11(91a + 10b)$ Išvada: bet kuris keturženklis veidrodinis skaičius dalijasi iš 11. Ats.: įrodyta: visi keturženkliai veidrodiniai skaičiai dalijasi iš 11.	1	Už skaičiaus išskaidymą ($abba \rightarrow 1001a + 110b$).
	1	Už išvadą apie dalumą iš 11.
Pastabos		

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Veidrodiniai skaičiai yra apibrėžiami simetriškai – užtenka žinoti pusę jo skaitmenų, jei n lyginis, ir pusę $+1$ jo skaitmenų, jei n nelyginis. Taisyklė: - Jei n lyginis ($n = 2k$) $\rightarrow$ veidrodinį skaičių abipusiai vienareikšmiškai apibrėžia pirmieji k jo skaitmenų. 1-asis skaitmuo negali būti nulis ($\in \{1-9\}$), kiti gali būti ir nuliai ($\in \{0-9\}$) - Skaičių kiekis: $9 \cdot 10^{k-1}$	1	Už pastebėjimą, kad pakanka pusės skaitmenų.
	1	Už skirtingų atvejų (lyginis / nelyginis) atskyrimą.

- Jei n nelyginis ($n = 2k + 1$) → veidrodinį skaičių abipusiai vienareikšmiškai apibrėžia pirmieji $k+1$ jo skaitmenys 1-asis skaitmuo $\in \{1-9\}$, kiti $\in \{0-9\}$ - Skaičių kiekis: $9 \cdot 10^k$ Ats.: $\begin{cases} 9 \cdot 10^{k-1}, & \text{jei } n = 2k \\ 9 \cdot 10^k, & \text{jei } n = 2k + 1 \end{cases}, \text{ kur } n \geq 1$	1	<i>Už teisingą formulės pateikimą.</i>
Pastabos		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite, kad dviženklis skaičius negali prasidėti nuliu.

2 užuomina. Veidrodinis reiškia, kad abu skaitmenys tokie patys.

3 užuomina. Kiek tokių skaičių prasideda 1–9?

2 užduotis

1 užuomina. Pabandykite užrašyti keturženklį veidrodinį skaičių suma – išskaidykite jį į tūkstančių, šimtų, dešimčių ir vienetų vietų sandaugų sumą.

2 užuomina. Pagalvokite, ką reiškia, kad skaičiaus išraiška dalijasi iš 11 – kada visa suma yra skaičiaus 11 kartotinis?

3 užduotis

1 užuomina. Ar gali visas veidrodinis skaičius būti žinomas tik iš jo pirmos pusės skaitmenų?

2 užuomina. Kiek skirtingų skaitmenų turi tokie skaičiai, kai viso skaičiaus ilgis yra 3, 4, 5 skaitmenys?

3 užuomina. Pabandykite iš bendro atvejo išvesti taisyklę, kai skaičių sudaro lyginis ir nelyginis skaitmenų skaičius.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrūpis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Duomenys ir tikimybės	Išplėstinis	Rinkiniai: kėliniai, gretiniai, deriniai.	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Slenkstinis	1
2				Rinkiniai: kėliniai, gretiniai, deriniai.	Loginis mąstymas ir įrodymai	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Pagrindinis	2
3				Rinkiniai: kėliniai, gretiniai, deriniai.	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Aukštesnysis	3

Universiteto stojamasis balas

Bendroji įvestis

Abiturientas planuoja stoti į universitetą užsienyje. Pasirinktas universitetas leidžia stojantiejiems pasirinkti **4 dalykus**, iš kurių pažymių bus skaičiuojamas stojamasis balas. Tačiau universitetas yra nustatęs **dalykų koeficientus**, kurie rodo, kokį **svorį** turi kiekvienas dalykas.

Stojamojo balo formulė:

$$\text{stojamasis balas} = \frac{\text{pažymys}_1 \cdot k_1 + \text{pažymys}_2 \cdot k_2 + \text{pažymys}_3 \cdot k_3 + \text{pažymys}_4 \cdot k_4}{k_1 + k_2 + k_3 + k_4}$$

Kur k_i – i dalyko koeficientas. Stojamasis balas suapvalinamas iki šimtųjų.

Universiteto nustatyti dalykų koeficientai:

- matematika – 4,
- informatika – 3,
- lietuvių kalba – 2,
- biologija – 2,
- fizika – 3,
- istorija – 1.

Abituriento pažymiai:

- matematika – 9,
- informatika – 8,
- lietuvių kalba – 10,
- biologija – 7,
- fizika – 9,
- istorija – 8.

Užduotys

1 užduotis

Koks būtų stojamasis balas, jei abiturientas pasirinktų šiuos dalykus: matematiką, fiziką, informatiką ir lietuvių kalbą?

2 užduotis

Kaip pasikeistų stojamasis balas, jei mokinys vietoj matematikos, fizikos, informatikos ir lietuvių kalbos rinktųsi matematiką, fiziką, istoriją ir lietuvių kalbą. Stojamojo balo pokytį užrašykite suapvalintą iki šimtųjų.

3 užduotis

Abiturientai priimami, jei jų **pasirinktų 4 dalykų vidurkis $\geq 8,5$** , bet **turi būti pasirinktas bent vienas gamtos mokslų dalykas** (biologija, chemija arba fizika) ir **negalima rinktis dviejų humanitarinių dalykų vienu metu** (nagrinėjamu atveju – lietuvių kalbos ir istorijos). Kurią kombinaciją labiausiai verta pasirinkti, jei tikslas – kuo didesnis stojamasis balas?

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
$\text{Stojamasis balas} = \frac{9 \cdot 4 + 9 \cdot 3 + 8 \cdot 3 + 10 \cdot 2}{4 + 3 + 3 + 2} = \frac{36 + 27 + 24 + 20}{12} = \frac{107}{12} \approx 8,92.$ Ats.: 8,92.	1	Už teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Pirmasis variantas: matematika, fizika, informatika, lietuvių kalba → 8,92. Antrasis variantas: matematika, fizika, istorija, lietuvių kalba → 9,10. Skirtumas: 9,10 – 8,92 = 0,18. Ats.: stojamasis balas padidėtų 0,18.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo strategiją.
	1	Už teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Tinkamos galimos kombinacijos: matematika, informatika, fizika, lietuvių kalba; matematika, informatika, fizika, istorija; matematika, informatika, biologija, lietuvių kalba; matematika, informatika, biologija, istorija.	1	Už galimų kombinacijų tikrinimą.
Galimų kombinacijų balai: matematika, informatika, fizika, lietuvių kalba → 8,92; matematika, informatika, fizika, istorija → 8,64; matematika, informatika, biologija, lietuvių kalba → 8,55; matematika, informatika, biologija, istorija → 8,2.	1	Už teisingai apskaičiuotus balus.
Ats.: geriausia kombinacija – matematika, informatika, fizika, lietuvių kalba. Šios kombinacijos balas – 8,92.	1	Už teisingą išvadą ir atsakymą.
Pastabos		
Jei tikrinama pagal sąlygą negalimas kombinacijas, pvz., 2 gamtos mokslai arba lietuvių kalba ir istorija kartu, balas už galimų kombinacijų tikrinimą neskiriamas.		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite, kad kiekvienas dalykas turi skirtingą koeficientą – sudarykite lentelę su pažymiais ir koeficientais.

2 užuomina. Padauginkite kiekvieną pažymį iš atitinkamo dalyko koeficiento. Sudėkite visas gautas sandaugas.

3 užuomina. Sudėkite visų pasirinktų dalykų koeficientus ir padalykite sandaugų sumą iš šios sumos. Nepamirškite suapvalinti.

2 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite pirmojo varianto balą – kaip 1 užduotyje.

2 užuomina. Informatiką pakeiskite į istoriją ir apskaičiuokite antrojo varianto balą.

3 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad istorijos koeficientas mažesnis už informatikos.

4 užuomina. Palyginkite abiejų variantų balus ir apskaičiuokite, kaip pasikeičia rezultatas.

3 užduotis

1 užuomina. Atmeskite kombinacijas, kuriose nėra fizikos arba biologijos.

2 užuomina. Atmeskite kombinacijas, kuriose yra ir lietuvių kalba, ir istorija.

3 užuomina. Patikrinkite likusių kombinacijų pažymių vidurkį – ar jis yra bent 8,5?

4 užuomina. Iš likusių tinkamų kombinacijų apskaičiuokite stojamąjį balą ir pasirinkite tą, kurios balas didžiausias.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Kursas	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	12	Duomenys ir tikimybės	Išplėstinis	Atsitiktiniai dydžiai.	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	1
2				Atsitiktiniai dydžiai.	Matematinis problemų sprendimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	2
3				Atsitiktiniai dydžiai.	Matematinis problemų sprendimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Aukštesnysis	3