

Matematinio samprotavimo užduotys

9 – 10 (gimnazijų I – II) klasėms

Užduočių rinkinys skirtas matematinio samprotavimo gebėjimų ugdymui 9–10 (gimnazijų I – II) klasių mokiniams pagal atnaujintas Bendrąsias programas

TURINYS

IVADAS	4
9 (GIMANZIJOS I) KLASĖ, MODELIAI IR SĄRYŠIAI	6
SIUNTŲ IŠVEŽIOJIMAS.....	7
ALGEBRINIAI SKAIČIAI.....	11
TELEFONO BATERIJA.....	15
DAUGIANARIŲ KOEFICIENTAI	19
PABĖGIMO KAMBARYS IR TRUPMENINIAI REIŠKINIAI	23
INVESTICIJA Į SAULĖS ENERGIJĄ	31
PAIEŠKŲ SISTEMOS	35
ĮRAŠŲ POPULIARUMO VERTINIMO ALGORITMAI	39
KOMANDOS DYDŽIO PLANAVIMAS	44
VAISTINIAI TIRPALAI	48
VAISTŲ KONCENTRACIJA KRAUJYJE	53
GRINDŲ PLYTELĖS.....	58
OBJEKTŲ JUDĖJIMO MODELIAVIMAS KOMPIUTERINIUISE ŽAIDIMUISE	63
DVIRAČIŲ NUOMOS PUNKTAS	67
ŠVIESOS JUTIKLIS	71
9 (GIMANZIJOS I) KLASĖ, GEOMETRIJA IR MATAVIMAI	77
SKRITULIŲ SUPAKAVIMAS.....	78
DVIRATININKAS KALNUOSE	83
ŠEŠĖLIO ILGIS	88
PLYTELIŲ MOZAIKOS GEOMETRIJA	94
TILTAS PER UPĘ.....	99
VITRAŽAS.....	103
SAUGUS NAUDOJIMASIS KOPĖČIOMIS	107
9 (GIMANZIJOS I) KLASĖ, DUOMENYS IR TIKIMYBĖS	111
MATEMATINIO MODELIAVIMO PAVYZDYS.....	112
10 (GIMANZIJOS II) KLASĖ, MODELIAI IR SĄRYŠIAI	116
TIRPALO KONCENTRACIJA	117
AŠTUNTAINĖ SKAIČIAVIMO SISTEMA	122
FIBONAČIO SEKOS SAVYBĖ	127
KANTORO DULKĖS 1	131
POPIERIAUS LAPAI	136
DISKRETIZAVIMAS	141
GĖLYNO PLANAS 1	146
RACIONALIŲJŲ FUNKCIJŲ SKAIDYMAS	150
AUTOMOBILIO DRAUDIMO KAINOS	154
NUOMONĖS FORMAVIMAS IR ALGORITMAI	158
ASANA TAŠKAI	162
MŪRO DĖSNIS.....	168
KURO SĄNAUDOS	173
KURJERIS.....	178
10 (GIMANZIJOS II) KLASĖ, GEOMETRIJA IR MATAVIMAI	182

TEODOLITAS	183
AUKSINĖ PENTAGRAMA.....	188
PAKLIDOS GEODEZINIJOSE MATAVIMUOSE	194
FONTANO KANALŲ ILGIS.....	198
DRONAI IR ARCHEOLOGAI	202
PERIODINIŲ JUDĖJIMŲ MODELIAVIMAS KOMPIUTERINIJOSE ŽAIDIMUOSE.....	206
10 (GIMANZIJO II) KLASĖ, DUOMENYS IR TIKIMYBĖS	210
MONETŲ INDAS	211
MIEGO TRUKMĖ	216
TEIGINIŲ APIE GIMTADIENIUS PAGRINDIMAS PRIEŠTAROS BŪDU	221
SANTUOKŲ STATISTIKA 1	227
MEDICININIAI DIAGNOSTINIAI MODELIAI	231
DRABUŽIŲ DERINIAI KELIONĖMS	236
SLAPTAŽODŽIŲ STIPRUMAS	242

ĮVADAS

Šis dokumentas parengtas įgyvendinant Nacionalinės švietimo agentūros projektą „Skaitmeninė švietimo transformacija („EdTech“)\", kurio tikslas – tobulinti mokymo(si) turinį ir priemones, siekiant ugdyti XXI amžiaus gebėjimus. Dokumente pateikiamos užduotys skirtos 9 – 10 (gimnazijų I – II) klasių mokiniams ir yra orientuotos į matematinio samprotavimo gebėjimų ugdymą, kaip tai apibrėžta atnaujintoje Matematikos bendrojoje programoje.

Matematinio samprotavimo svarba

Atnaujinta Matematikos bendroji programa akcentuoja, kad matematika nėra tik formulės ar skaičiavimai – tai būdas mąstyti, daryti išvadas, pagrįsti sprendimus. Matematinis samprotavimas reiškia gebėjimą suprasti ryšius tarp objektų ir reiškinių, pastebėti dėsningumus, juos analizuoti, paaiškinti ir pagrįsti, kodėl tam tikras sprendimas yra tinkamas. Šie įgūdžiai būtini ne tik mokantis matematikos, bet ir sprendžiant realaus gyvenimo uždavinius, priimant atsakingus sprendimus.

Šiose užduotyse matematinis samprotavimas ugdomas per:

- loginį argumentavimą,
- aiškinimą, kodėl atsakymas teisingas,
- paprastų problemų nagrinėjimą įvairiuose kontekstuose.

Matematinio samprotavimo užduotys sudarytos atsižvelgiant į atnaujintos bendrosios programos tikslus, kurie pabrėžia gebėjimą kelti klausimus, ieškoti ryšių, taikyti skirtingas strategijas sprendžiant problemas, taip pat paaiškinti ir pagrįsti savo sprendimo kelią.

Dokumento struktūra

Dokumente pateikiami parengti užduočių pavyzdžiai, skirti 9 – 10 (gimnazijų I – II) klasių mokiniams. Užduotys **suskirstytos pagal klasę ir mokymosi turinio sritį** (pvz.: Modeliai ir sąryšiai, Geometrija ir matavimai, Duomenys ir tikimybės). Kiekviena užduotis pateikiama šia struktūra:

- **Užduoties pavadinimas:** trumpa tema ar situacijos santrauka.
- **Bendroji įvestis:** trumpas kontekstas, supažindinantis mokinį su situacija ir įtraukiantis į uždavinio aplinką.
- **Užduočių klausimai:** jų gali būti nuo 2 iki 4 sudėlioti nuo paprastesnio iki sudėtingesnio, skatinantys samprotauti.

- **Vertinimo instrukcija:** aprašyta, už ką skiriami taškai.
- **Pagalba mokiniui:** užuominos, padedančios eiti link sprendimo.
- **Metaduomenų lentelė:** klasė, turinio sritis, pasiekimų sritis, pasiekimų lygis ir taškų skaičius.

Užduočių apimtis

Šiame dokumente pateikiamos **50** matematinio samprotavimo užduočių, skirtų 9 – 10 (gimnazijų I – II) klasės mokiniams. Užduotys suskirstytos pagal klases: pirmiausia pateikiamos užduotys 9 (gimnazijų I) klasei, po jų – 10 (gimnazijų II) klasei. Kiekvienoje klasėje užduotys išdėstytos pagal Bendrųjų programų (BP) sritis, siekiant užtikrinti aiškią struktūrą ir sudaryti galimybę greitai rasti užduotis pagal atitinkamą turinį.

Dokumentas skirtas naudoti mokymo(si) procese, rengiant užduotis mokinių matematinio samprotavimo gebėjimams ugdyti ir vertinti.

9 (GIMANZIJS I) KLASĖ, MODELIAI IR SĄRYŠIAI

Siuntų išvežiojimas

Bendroji įvestis

Mykolas svarsto galimybę įsidarbinti siuntų išvežiojimo srityje. Vertindamas darbo pasiūlymus, jis aptiko, kad apmokėjimas būna dviejų rūšių. Kai kuriose darbovietėse atlyginimas priklauso vien tik nuo darbo valandų skaičiaus. Kitose – nuo darbo valandų skaičiaus ir pristatytų siuntų kiekio.

Pavyzdžiui, darbovietė A moka 10 eurų už valandą, o darbovietė B moka – 4 eurus už valandą ir po 2 eurus už kiekvieną pristatytą siuntą.

Planuodamas savo darbinę veiklą, jis pabandė įvertinti, kokio pobūdžio užmokestį jam rinktis naudingiau. Nustatykite ir pasistenkite argumentuoti, kiek vidutiniškai siuntų Mykolas galėtų pristatyti per valandą savo gyvenamoje vietovėje, didmiestyje, nedideliame mieste ar kaimo vietovėje.

Užduotys

1 užduotis

Apskaičiuokite, kurioje darbovietėje (A ar B) dirbti būtų naudingiau, jei per valandą Mykolas pristatytų 5 siuntas.

2 užduotis

Per valandą Mykolas pristato N siuntų. Atlyginimui darbovietėse A ir B apskaičiuoti sudarykite funkcijas, priklausančias nuo laiko t (laikas matuojamas valandomis).

Kokia turėtų būti N reikšmė, kad Mykolas daugiau pinigų uždirbtų darbovietėje B?

3 užduotis

Ištyrinėjęs visas darbovietes Mykolas pasirinko dvi didžiausią užmokestį siūlančias įmones ir nusprendė palyginti jas tarpusavyje.

Darbovietė C moka 5 eurus už valandą ir 2,1 euro už pristatytą siuntą. Darbovietė D moka 4 eurus už valandą ir 2,2 euro už pristatytą siuntą.

Per valandą Mykolas pristato N siuntų. Atlyginimui darbovietėse C ir D apskaičiuoti sudarykite funkcijas, priklausančias nuo laiko t (laikas matuojamas valandomis). Apskaičiuokite, kiek siuntų Mykolui reikėtų pristatyti per valandą, kad daugiau uždirbtų darbovietėje D.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Darbovietėje B Mykolas per valandą uždirbtų: $4 + 5 \cdot 2 = 14$.	1	Už teisingai apskaičiuotą uždarbį darbovietėje B.
Iš sąlygos žinoma, kad darbovietėje A per valandą Mykolas uždirbtų 10 Eur. $14 > 10$, todėl jam būtų naudingiau dirbti darbovietėje B. Ats.: naudingiau dirbti darbovietėje B.	1	Už teisingą atsakymą.
Pastabos		
Jei atsakymas teisingas, bet neargumentuotas, skiriamas 1 taškas.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Darbovietėje A: $f(t) = 10 \cdot t$.	1	Už sudarytą teisingą funkciją.
Darbovietėje B: $g(t) = 4 \cdot t + 2 \cdot N \cdot t$.	1	Už sudarytą teisingą funkciją.
Pagal sąlygą gauname nelygybę: $10 \cdot t < 4 \cdot t + 2 \cdot N \cdot t$. arba $10 < 4 + 2 \cdot N$ (nes $t > 0$).	1	Už gautą teisingą nelygybę.
$N > 3$. Ats.: kad darbovietėje B Mykolas uždirbtų daugiau, per valandą jis turi pristatyti daugiau nei 3 siuntas.	1	Už gautą teisingą nelygybės sprendinį.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Darbovietėje C: $f(t) = 5 \cdot t + 2,1 \cdot N \cdot t$.	1	Už sudarytą teisingą funkciją.
Darbovietėje D: $g(t) = 4 \cdot t + 2,2 \cdot N \cdot t$.	1	Už sudarytą teisingą funkciją.
$5 \cdot t + 2,1 \cdot N \cdot t < 4 \cdot t + 2,2 \cdot N \cdot t$ arba $5 + 2,1 \cdot N < 4 + 2,2 \cdot N$ (nes $t > 0$)	1	Už gautą teisingą nelygybę.
$N > 10$. Ats.: kad darbovietėje D Mykolas uždirbtų daugiau, per valandą jis turi pristatyti daugiau nei 10 siuntų.	1	Už gautą teisingą nelygybės sprendinį.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Pagalvokite, kiek Mykolas uždirbtų kiekvienoje darbovietėje per 1 valandą.

2 užuomina. Jei darbovietėje A per valandą uždirbama 10 eurų, o darbovietėje B – 4 eurus ir papildomai po 2 eurus už kiekvieną siuntą, kiek Mykolas uždirbtų darbovietėje B?

3 užuomina. Palyginkite užmokesčius abejose darbovietėse per valandą ir padarykite išvadą.

2 užduotis

1 užuomina. Įsivaizduokite, kad darbovietėje A praėjo t darbo valandų. Tuomet kiek eurų būtų uždirbta? Užrašykite šį dydį kaip nuo t priklausančią funkciją.

2 užuomina. Dabar įsivaizduokite, kad darbovietėje B praėjo t darbo valandų. Tuomet kiek eurų būtų uždirbta? Užrašykite šį dydį kaip nuo t priklausančią funkciją. Nepamirškite įtraukti ir sumos, uždirbtos už kiekvieną pristatytą siuntą (po 2 eurus).

3 užuomina. Sudarykite nelygybę, parodančią, kad darbovietėje B užmokestis didesnis. Išspręskite šią nelygybę. Atsakyme pateikite, kokiam intervalui priklauso N.

3 užduotis

1 užuomina. Darbovietėje C Mykolas dirbo t darbo valandų. Kiek eurų jis uždirbo? Užrašykite šį dydį kaip nuo t priklausančią funkciją. Nepamirškite įtraukti ir sumos, uždirbtos už kiekvieną pristatytą siuntą (po 2,1 euro).

2 užuomina. Darbovietėje D Mykolas dirbo t darbo valandų. Kiek eurų jis uždirbo? Užrašykite šį dydį kaip nuo t priklausančią funkciją. Nepamirškite įtraukti ir sumos, uždirbtos už kiekvieną pristatytą siuntą (po 2,2 euro).

3 užuomina. Sudarykite nelygybę, parodančią, kad darbovietėje D užmokestis didesnis. Išspręskite šią nelygybę. Atsakyme pateikite, kokiam intervalui priklauso N.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Modeliai ir sąryšiai	Tiesiniai ir netiesiniai sąryšiai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Tiesiniai ir netiesiniai sąryšiai	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	4
3			Tiesiniai ir netiesiniai sąryšiai	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	4

Algebriniai skaičiai

Bendroji įvestis

Matematikoje kartais vartojama sąvoka „algebrinis skaičius“. Paprastai sakant – tai reiškia, kad skaičius buvo gautas sprendžiant lygtį, atitinkančią tam tikrą pavidalą. Vienas paprasčiausių algebrinių skaičių poaibių yra racionaliųjų skaičių aibė. Visi racionalieji skaičiai gaunami sprendžiant tiesines $ax + b = 0$ pavidalo lygtis su racionaliaisiais koeficientais $a \neq 0$ ir b .

Už racionaliųjų skaičių aibę didesnį algebrinių skaičių poaibį sudaro skaičiai, kurie yra kvadratinų lygčių su racionaliaisiais koeficientais sprendiniai. Kitaip tariant, jeigu skaičius yra kokios nors kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ sprendinys, kur koeficientai $a \neq 0$, b ir c yra racionalieji skaičiai, jis tikrai yra algebrinis skaičius. Pavyzdžiui, skaičiai $\sqrt{2}$ ir $-\sqrt{2}$ yra algebriniai, nes jie yra lygties $x^2 - 2 = 0$ sprendiniai, o šios lygties koeficientai ($a = 1$, $b = 0$ ir $c = -2$) yra racionalieji skaičiai.

Užduotys

1 užduotis

Sugalvokite kvadratinę lygtį su racionaliaisiais koeficientais, kuri galioja su $x = 0$.

Sugalvokite kitą kvadratinę lygtį su racionaliaisiais koeficientais, kuri galioja su $x = 1$.

2 užduotis

Parodykite, kad skaičiai $\sqrt{3}$ ir $\sqrt{5}$ yra algebriniai: sugalvokite vieną kvadratinę lygtį su racionaliaisiais koeficientais, kuri galioja su $x = \sqrt{3}$, ir kitą kvadratinę lygtį su racionaliaisiais koeficientais, kuri galioja su $x = \sqrt{5}$.

3 užduotis

Parodykite, kad skaičius $\frac{-1 - \sqrt{29}}{2}$ yra algebrinis, t. y. bent vienos kvadratinės lygties su racionaliaisiais koeficientais sprendinys.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Pvz., $x^2 = 0$.	1	Už užrašytą teisingą lygtį, kuri galioja su $x = 0$.
Pvz., $x^2 = 1$.	1	Už užrašytą teisingą lygtį, kuri galioja su $x = 1$.
Pastabos		
Tinka ir kiti lygčių pavidalai, pvz.: pirmuoju atveju tinka $x^2 - x = 0$, antruoju atveju $-(x - 1)^2 = 0$.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Pvz., $x^2 - 3 = 0$.	1	Už užrašytą teisingą lygtį, kurios sprendinys $x = \sqrt{3}$.
Pvz., $x^2 - 5 = 0$.	1	Už užrašytą teisingą lygtį, kurios sprendinys $x = \sqrt{5}$.
Pastabos		
Jei atsakyme pateikiama sudėtingesnė lygtis, reikia tikrinti, ar galioja užduoties sąlyga.		

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Skaičių $\frac{-1 - \sqrt{29}}{2}$ nagrinėjime kaip kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ sprendinį $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą susiejimą su kvadratinės lygties sprendiniu.
Pagal sąlygoje pateiktą skaičių ir kvadratinės lygties sprendinio formulę, galime susieti a ir b reikšmes. Todėl kvadratinė lygtis yra, pvz., $x^2 + x + c = 0$.	1	Už teisingai nustatytus a ir b koeficientus.
Galioja $29 = 1 - 4 \cdot 1 \cdot c$, todėl $c = -7$.	1	Už teisingai apskaičiuotą c koeficientą.
$\frac{-1 - \sqrt{29}}{2}$ yra algebrinis skaičius, nes tai yra lygties $x^2 + x - 7 = 0$ sprendinys.	1	Už padarytą teisingą išvadą.
Pastabos		
Vietoje $x^2 + x + c = 0$ gali būti nagrinėjama ir kartotinė lygtis.		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite $x^2 + c = 0$ pavidalo nepilnąsias kvadratinės lygtis. Jei vietoje x įsistatysite vieną iš sąlygoje pateiktų skaičių, koks turi būti c ?

2 užuomina. Sugalvokite dvi skirtingas $x^2 + c = 0$ pavidalo kvadratinės lygtis: pirma turi galioti su $x = 0$, o antra – su $x = 1$.

2 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite $x^2 + c = 0$ pavidalo nepilnąsias kvadratinės lygtis. Jei vietoje x įsistatysite vieną iš sąlygoje pateiktų skaičių, koks turi būti c ?

2 užuomina. Sugalvokite dvi skirtingas $x^2 + c = 0$ pavidalo kvadratinės lygtis: pirma turi galioti su $x = \sqrt{3}$, o antra – su $x = \sqrt{5}$.

3 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite pilnąją kvadratinę lygtį $ax^2 + bx + c = 0$. Ar tai galėtų būti tokios lygties sprendinys?

2 užuomina. Prisiminkite kvadratinės lygties sprendinių $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ pavidalą. Ar galėtumėte palyginti šią formulę su sąlygoje pateiktu skaičiumi bei nustatyti a ir b reikšmes?

3 užuomina. Nustačius a ir b reikšmes, kokia sąlyga turi galioti c reikšmei?

4 užuomina. Kai nustatysite a ir b reikšmes bei apskaičiuosite c reikšmę, sudarykite šiuos koeficientus atitinkančią kvadratinę lygtį. Pagal tai padarykite išvadą, ar skaičius $\frac{-1 - \sqrt{29}}{2}$ yra algebrinis.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrūpis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Modeliai ir sąryšiai	Algebra	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Algebra	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	2
3			Algebra	Loginis mąstymas ir įrodymai	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	4

Telefono baterija

Bendroji įvestis

Išmaniojo telefono baterijos išsikrovimo greitis priklauso nuo to, ką veikiame su telefonu. Pavyzdžiui, naudojant blykstę arba kamerą išseikvojama daug energijos, naršant internete – mažiau, o visai nenaudojant telefono jo baterija išsikrauna per keletą dienų.

Filmuojant vaizdo įrašą, telefono baterija tolygiai (vienodu greičiu) išsikrauna per 4 valandas, o ieškant informacijos internete – per 8 valandas.

Užduotys

1 užduotis

Marija visiškai įkrovė savo telefoną ir 2 valandas filmavo vaizdo įrašą. Kiek valandų baigusi filmuoti ji dar galės ieškoti internete informacijos, kol telefono baterija visiškai išsikraus?

2 užduotis

Visiškai įkrovus telefoną buvo filmuojama x valandų, po to y valandų ieškoma internete informacijos. Tada telefono baterijos buvo likę $\frac{1}{2}$. Apskaičiuokite, kiek valandų buvo filmuojama ir ieškoma internete, jei bendras filmavimo ir darbo internete laikas iš viso buvo 3 valandos.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Po 2 valandų filmavimo likusi / išeikvota pilnos baterijos įkrovos dalis: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą, kiek baterijos įkrovos dalies liko / buvo išeikvota po filmavimo.
Su puse baterijos įkrovos Marija dar galės internete ieškoti informacijos: $\frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ valandas.	1	Už apskaičiuotą teisingą informacijos ieškojimo internete laiką.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
Iš sąlygoje pateiktos informacijos sudarome lygčių sistemą: $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{8} = \frac{1}{2} \\ x + y = 3 \end{cases}$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą sudaryti dviejų lygčių sistemą.
Naudojame keitinį: $x = 3 - y$ (arba $y = 3 - x$) ir gauname lygtį $\frac{3-y}{4} + \frac{y}{8} = \frac{1}{2}$ (arba $\frac{x}{4} + \frac{3-x}{8} = \frac{1}{2}$).	1	Už gautą vieno kintamojo lygtį naudojant keitinį arba taikant sudėties metodą.
Pertvarkome lygtį į $6 - 2 \cdot y + y = 4$ (arba $2 \cdot x + 3 - x = 4$).	1	Už gautą teisingą tiesinę lygtį su sveikaisiais koeficientais.
$y = 2$	1	Už gautą teisingą y reikšmę.
$x = 1$	1	Už gautą teisingą x reikšmę.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Jei filmuojant baterija visiškai išsekvojama per 4 valandas, tuomet kokia iki galo įkrautos baterijos įkrovos dalis lieka po 2 valandų filmavimo? Sprendžiant galima taikyti proporciją.

2 užuomina. Su gautu dydžiu vėl sudarykite proporciją ir nustatykite, kiek laiko su šia baterijos pilnos įkrovos dalimi bus galima ieškoti informacijos internete, jeigu visiškai įkrauta baterija dirbant internete iškraunama per 8 valandas.

2 užduotis

1 užuomina. Sudarykite dviejų tiesinių lygčių sistemą. Užrašykite vieną lygtį bendram valandų skaičiui ir vieną lygtį baterijos įkrovos lygiui apskaičiuoti.

2 užuomina. Iš vienos lygties išreikškite x arba y ir įstatykite į kitą lygtį. Taip gausite x ir y reikšmes.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Modeliai ir sąryšiai	Algebra.	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	2
2			Algebra.	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	5

Daugianarių koeficientai

Bendroji įvestis

Matematikoje, sprendžiant sudėtingas užduotis, kartais naudojama ši su daugianariais susijusi teorema: **jeigu du daugianariai yra tapatūs su visomis argumento reikšmėmis, tuomet jų koeficientai, esant vienodiems argumento laipsniams, yra lygūs.**

Panagrinėkime kvadratinius trinarius, kurių kanoninis pavidalas yra $ax^2 + bx + c$. Sakykime, kad $3x^2 + 5x + 2 = ax^2 + bx + c$ su visomis realiosiomis argumento x reikšmėmis. Tuomet pagal šią teoremą išeina, kad $a = 3, b = 5, c = 2$.

Užduotys

1 užduotis

Jeigu $3x + b = ax + 2$ su visomis realiosiomis x reikšmėmis, tuomet kam lygios a ir b reikšmės?

2 užduotis

Jeigu $ax^2 + bx + c = 2x^2 + (a + 1)x + (a + b)$ su visomis realiosiomis x reikšmėmis, tuomet kam lygios a, b ir c reikšmės?

3 užduotis

Žinoma, kad $a^2x^2 + bx - 2 = b^2x^2 + (a + 2)x - 2$ su visomis realiosiomis x reikšmėmis. Apskaičiuokite a ir b reikšmes. Nustatykite, kiek su jomis lygtis $a^2x^2 + bx - 2 = 0$ turi realiųjų sprendinių.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Remiamės koeficientu prie x ir nustatome, kad: $a = 3$.	1	Už teisingą atsakymą.
Remiamės laisvuju nariu ir nustatome, kad: $b = 2$.	1	Už teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Remiamės koeficientu prie x^2 ir nustatome, kad: $a = 2$.	1	Už teisingą atsakymą.
Remiamės koeficientu prie x ir nustatome, kad: $b = a + 1 = 3$.	1	Už teisingą atsakymą.
Remiamės laisvuju nariu ir nustatome, kad: $c = a + b = 5$.	1	Už teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
Palyginame koeficientus ir gauname dviejų lygčių sistemą, kad rastume a ir b : $\begin{cases} a^2 = b^2, \\ b = a + 2. \end{cases}$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Keitimo būdu gauname lygtį: $a^2 = (a + 2)^2$ arba $(b - 2)^2 = b^2$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Suprastiname ir gauname $4a = -4$, todėl: $a = -1, b = 1$.	1	Už gautą teisingą atsakymą (a ir b reikšmes).
Gautos lygties $x^2 + x - 2 = 0$ diskriminantas lygus: $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$.	1	Už teisingai apskaičiuotą diskriminantą.
Ats.: lygtis turi du realiuosius sprendinius.	1	Už gautą teisingą atsakymą (sprendinių skaičių).

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Palyginkite abiejų dvinarių koeficientus, kurie yra sudauginti su x . Jei jie tarpusavyje lygūs, kokia yra a reikšmė?

2 užuomina. Palyginkite abiejų dvinarių laisvuosius narius. Jei jie tarpusavyje lygūs, kokia yra b reikšmė?

2 užduotis

1 užuomina. Palyginkite abiejų trinarių koeficientus, kurie yra sudauginti su x^2 nariu. Jei jie lygūs, kokia yra a reikšmė?

2 užuomina. Palyginkite abiejų trinarių koeficientus, kurie yra sudauginti su x nariu. Jei jie lygūs, kokia yra b reikšmė? Pasinaudokite jau nustatyta a reikšme ir apskaičiuokite b reikšmę.

3 užuomina. Palyginkite abiejų trinarių laisvuosius narius. Jei jie lygūs, kokia yra c reikšmė? Pasinaudokite jau nustatytomis a, b reikšmėmis ir apskaičiuokite c reikšmę.

3 užduotis

1 užuomina. Palyginkite abiejų trinarių koeficientus. Pagal koeficientus prie x^2 narių gausite vieną lygtį, pagal koeficientus prie x narių gausite dar vieną lygtį. Pritaikykite keitimo būdą ir išspręskite šią dviejų lygčių sistemą.

2 užuomina. Kai išspręsite lygčių sistemą ir apskaičiuosite a, b reikšmes, įsistatykite jas į lygtį $a^2x^2 + bx - 2 = 0$. Nustatykite, kam lygus šios lygties diskriminantas – pagal jo reikšmę žinosite, kiek realiųjų sprendinių lygtis turi. Atkreipkite dėmesį, kad pačių sprendinių apskaičiuoti nebūtina.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Modeliai ir sąryšiai	Algebra	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Slenkstinis	2
2			Algebra	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	3
3			Algebra	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	5

Pabėgimo kambarys ir trupmeniniai reiškiniai

Bendroji įvestis

Nojus su Akvile – dideli matematikos entuziastai. Abu jie dalyvauja ypatingame matematiniame iššūkyje – ketina įveikti pabėgimo kambario užduotis, iš kurio norint ištrūkti reikia atrakinti tris spynas. Su kiekviena spyna susijusi atskira matematinė užduotis. Kad spyna atsivertų, reikia:

- teisingai suprastinti pateiktą reiškinį,
- įstatyti nurodytą x reikšmę ir apskaičiuoti rezultatą,
- įsitikinti, kad rezultatas atitinka užduoties sąlygą.

Tik atrakinę visas tris spynas, entuziastai galės ištrūkti iš kambario!

Užduotys

1 užduotis

Suprastinkite ir apskaičiuokite matematinį reiškinį:

$$\frac{5x - 10}{x^2 - 4} + \frac{3}{x + 2},$$

kai $x = 3$.

Prie sienos prilipusiame lapelyje su nupiešta šypsenele parašyta: „Dideli skaičiai – didelės bėdos. Skaičiuok atsargiai!“ Sklinda gandai, kad atsakymas – mažesnis nei 10.

Svarbu: pabėgimo kambario sistema fiksuoja visą sprendimo eigą, todėl vien tik teisingo atsakymo nepakanka. Kiekviena spyna atsiveria tik tada, kai visas sprendimo kelias yra teisingas.

2 užduotis

Suprastinkite ir apskaičiuokite matematinį reiškinį:

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 + 5x + 6} : \left(\frac{x - 2}{x^2 - 4} \right)^2,$$

kai $x = 6$.

Ant spynos įbrėžtas keistas simbolis – dvi sujungtos rodyklės ir skaičius 2. Po jomis įrašyta: „Tik lyginiai skaičiai bus išgirsti.“ Sklando kalbos, kad atsakymas dalijasi iš 2.

3 užduotis

Suprastinkite ir apskaičiuokite matematinį reiškinį:

$$\frac{x}{x+9} + \frac{2x^2}{x^2-81} : \frac{x^2+3x}{x^2-6x-27},$$

kai $x = 18$.

Ant grindų išraižyta spiralė, primenanti sraigę, o greta – trumpas įrašas: „Sek paskui seką.“

Manoma, kad šis užraktas reaguoja tik į Fibonačio skaičių.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Pastebime, kad pirmosios trupmenos skaitiklyje gali būti iškeltas bendrasis daugiklis: $5x - 10 = 5(x - 2).$ Pirmosios trupmenos vardiklis gali būti išskaidytas naudojant greitosios daugybos formulę: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$ Dabar trupmena tampa: $\frac{5(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}.$ Kadangi skaitiklyje ir vardiklyje yra bendrasis daugiklis $x - 2$, jį galime panaikinti: $\frac{5}{x + 2}.$	1	Už teisingai suprastintą pirmąją trupmeną.
Tada reiškinyje tampa: $\frac{5}{x + 2} + \frac{3}{x + 2}.$ Trupmenų vardikliai vienodi, todėl tereikia sudėti jų skaitiklius: $\frac{5 + 3}{x + 2} = \frac{8}{x + 2}.$	1	Už teisingai atliktą trupmenų sudėtį.
Apskaičiuojame reikšmę, kai $x = 3$: $\frac{8}{3 + 2} = \frac{8}{5} = 1,6.$ Ats.: 1,6.	1	Už teisingai apskaičiuotą reiškinio reikšmę, kai $x = 3$.
Pastabos		
Jei reikalinga, įrašomas paaiškinimas, kaip skiriami taškai.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Pirmoji trupmena Trupmenos skaitiklį ir vardiklį pertvarkome į sandaugas ir nustatome, ar atsiranda bendrųjų daugiklių. Pirmasis skaitiklis yra kvadratų skirtumas, todėl pritaikome greitosios daugybos formulę ir užrašome jį taip: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3).$ Pirmasis vardiklis yra kvadratinis trinaris, kurį galima išskaidyti į dviejų skliaustų sandaugą. Naudojame diskriminantą ir randame lygties $x^2 + 5x + 6 = 0$ šaknis: $D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1.$	1	Už teisingai suprastintą pirmąją trupmeną.

Šaknys: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 + 1}{2} = -2;$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 - 1}{2} = -3.$ Išskaidome: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3).$ Dabar trupmena tampa: $\frac{(x - 3)(x + 3)}{(x + 2)(x + 3)}.$ Kadangi skaitiklyje ir vardiklyje yra bendrasis daugiklis $x + 3$, jį galime panaikinti: $\frac{x - 3}{x + 2}.$		
Antroji trupmena Antrasis vardiklis yra kvadratų skirtumas. Pasinaudojame greitosios daugybos formule ir užrašome jį taip: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$ Tada trupmena tampa: $\frac{x - 2}{(x - 2)(x + 2)}.$ Kadangi skaitiklyje ir vardiklyje yra bendrasis daugiklis $x - 2$, galime jį supaprastinti: $\frac{1}{x + 2}.$ Pakeliame reiškinį kvadratu ir gauname: $\left(\frac{1}{x + 2}\right)^2 = \frac{1}{(x + 2)^2}.$	1	Už teisingai suprastintą ir antruoju laipsniu pakeltą antrąją trupmeną.
Dviejų trupmenų dalyba Pirmiausia dalybos veiksmą pakeičiame į daugybos veiksmą, o trupmeną, iš kurios dalijame, keičiame atvirkštine: $\frac{x - 3}{x + 2} : \frac{1}{(x + 2)^2} = \frac{x - 3}{x + 2} \cdot \frac{(x + 2)^2}{1}.$ Sudauginame ir gauname: $\frac{(x - 3)(x + 2)^2}{x + 2}.$ Kadangi skaitiklyje ir vardiklyje yra bendrasis daugiklis $x + 2$, galime jį supaprastinti: $\frac{(x - 3)(x + 2)}{1} = (x - 3)(x + 2) = x^2 - x - 6.$	1	Už teisingai atliktą trupmenų dalybą.
Apskaičiuojame reiškinio reikšmę, kai $x = 6$: $6^2 - 6 - 6 = 24.$ Ats.: 24.	1	Už teisingai apskaičiuotą reiškinio reikšmę, kai $x = 6$.
Pastabos		
Jei reikalinga, įrašomas paaiškinimas, kaip skiriami taškai.		

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas

	4	
Prieš atliekant veiksmus, trupmenos skaitikliai ir vardikliai pertvarkomi į sandaugas. Pirmoji trupmena išlieka nepakitusi: $\frac{x}{x+9}$ Antroji trupmena Antrasis vardiklis yra kvadratų skirtumas. Pasinaudojame greitosios daugybos formule ir užrašome jį taip: $x^2 - 81 = (x - 9)(x + 9).$ Dabar trupmena tampa: $\frac{2x^2}{(x - 9)(x + 9)}$	1	Už teisingai išskaidytą antrosios trupmenos kvadratų skirtumą.
Trečioji trupmena Trupmenos skaitiklyje galima iškelti bendrąjį daugiklį: $x^2 + 3x = x(x + 3).$ Vardiklis yra kvadratinis trinaris, kurį galima išskaidyti į dviejų skliaustų sandaugą. Naudojame diskriminantą, kad rastume lygties $x^2 - 6x - 27 = 0$ šaknis: $D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-27) = 36 + 108 = 144.$ Šaknys: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 + 12}{2} = 9;$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 - 12}{2} = -3.$ Išskaidome: $x^2 - 6x - 27 = (x - 9)(x + 3).$ Dabar trupmena tampa: $\frac{x(x + 3)}{(x - 9)(x + 3)}$ Trupmenos skaitiklyje ir vardiklyje yra bendrasis daugiklis $x + 3$, jį galime panaikinti: $\frac{x}{x - 9}$	1	Už teisingai suprastintą trečiąją trupmeną.
Atliekame trupmenų veiksmus Veiksmai su algebriniais reiškinių atliekami tokia pat tvarka, kaip ir su skaitiniais reiškinių. Pirmiausia padalysime, o po to sudėsime. Dabar turime: $\frac{x}{x+9} + \frac{2x^2}{(x-9)(x+9)} : \frac{x}{x-9}$ Pradedame nuo dalybos veiksmo, jį keičiame daugyba: $\frac{x}{x+9} + \frac{2x^2}{(x-9)(x+9)} \cdot \frac{x-9}{x} =$ $= \frac{x}{x+9} - \frac{2x^2(x-9)}{x(x-9)(x+9)}$	1	Už teisingai atliktus veiksmus su trupmeniniais reiškinių.

Antrosios trupmenos skaitiklyje ir vardiklyje yra bendrieji daugikliai $x + 9$ ir x, juos galime prastinti: $\frac{x}{x+9} + \frac{2x}{x+9}.$ Pirmąją ir antrąją trupmenas sudedame. Trupmenų vardikliai vienodi, todėl skaitiklius tiesiog sudedame: $\frac{x+2x}{x+9} = \frac{3x}{x+9}.$		
Apskaičiuojame reiškinių reikšmę, kai $x = 18$: $\frac{3 \cdot 18}{18+9} = 2.$ Ats.: 2.	1	<i>Už teisingai apskaičiuotą reiškinių reikšmę, kai $x = 18$.</i>
Pastabos		
Jei reikalinga, įrašomas paaiškinimas, kaip skiriami taškai.		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Jei trupmenos skaitiklis ar vardiklis sudėtingesnis, visų pirma reikia patikrinti, ar juos galima išskaidyti į sandaugas. Prisiminkite, kad prastinant trupmeninius reiškinius, dalyti galima tik iš skaitiklio ir vardiklio bendrojo daugiklio. Jei įmanoma, trupmenos skaitiklį ir vardiklį pertvarkykite taip, kad atsirastų bendrųjų daugiklių, kuriuos būtų galima suprastinti.

2 užuomina. Pagalvokite: kad galėtumėte sudėti trupmenas, jų vardikliai turi būti vienodi arba perrašyti taip, kad turėtų bendrąjį vardiklį.

3 užuomina. Kai gausite suprastintą išraišką, įstatykite $x = 3$ ir apskaičiuokite reiškinių reikšmę.

2 užduotis

1 užuomina. Dalijant vieną trupmeną iš kitos, svarbu prisiminti taisyklę: trupmenų dalybą galima pakeisti daugyba, apverčiant antrąją trupmeną. Prieš atliekant šį veiksmą, verta patikrinti, ar galima išskaidyti trupmenų skaitiklius ir vardiklius į sandaugas, kad būtų lengviau prastinti.

2 užuomina. Kvadratinės išraiškos dažnai gali būti išskaidomos į sandaugas. Tam gali būti naudinga taikyti greitosios daugybos formules arba rasti šaknų reikšmes, naudojant diskriminantą. Ar galite perrašyti vardiklius sandaugų pavidalu, kad būtų lengviau prastinti?

3 užuomina. Jei reikia sudėti ar atimti trupmenas, būtina rasti bendrąjį vardiklį.

4 užuomina. Kai gausite suprastintą išraišką, įstatykite $x = 6$ ir apskaičiuokite galutinę reikšmę.

3 užduotis

1 užuomina. Matematiniai veiksmai atliekami tam tikra tvarka – tarsi kylant laiptais. Visų pirma reikia atlikti veiksmus skliaustuose. Tada, jei reikškinys pakeltas laipsniu, keliama laipsniais. Po to iš kairės į dešinę atliekama daugyba ir dalyba. Pagaliau lieka sudėtis ir atimtis – šie veiksmai taip pat atliekami iš kairės į dešinę.

Trupmenų dalybą galima pakeisti daugyba, apverčiant antrąją trupmeną. Prieš tai verta patikrinti, ar trupmenų skaitiklius ir vardiklius galima išskaidyti į sandaugas.

2 užuomina. Kai vardikliai yra kvadratiniai daugianariai, galite juos perrašyti kaip dviejų skliaustų sandaugą. Pasinaudokite greitosios daugybos formulėmis arba pritaikykite diskriminantą ir raskite šaknis.

3 užuomina. Jei matematiniame reiškinyje reikia sudėti ar atimti trupmenas, jų vardikliai turi būti vienodi. Jei vardikliai skiriasi, būtina rasti mažiausią bendrąjį vardiklį. Perrašykite trupmenas taip, kad jos turėtų tą patį vardiklį, tada galėsite atlikti sudėties ar atimties veiksmus.

4 užuomina. Kai gausite suprastintą išraišką, įstatykite $x = 18$ ir apskaičiuokite galutinę reikšmę.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Modeliai ir sąryšiai	Algebra	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Problemų sprendimas	AMG	Patenkinamas	3
2			Algebra	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	4
3			Algebra	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	4

Investicija į saulės energiją

Bendroji įvestis

Šeima svarsto galimybę įsirengti saulės elektrinę ant savo namo stogo. Ji gali rinktis iš dviejų elektrinių tipų:

- A tipas (ekonomiškas): elektrinės kaina 5000 eurų. Metinė elektros energijos gamyba – 3000 kWh.
- B tipas (efektyvus): elektrinės kaina 7200 eurų. Metinė elektros energijos gamyba – 4500 kWh.

Vidutinė elektros kaina – 0,2 euro už 1 kWh, šeima namuose per metus suvartoja 5000 kWh elektros energijos.

Užduotys

1 užduotis

Kiek eurų per metus šeima sumokės už elektrą, jei įsigis A tipo saulės elektrinę?

2 užduotis

Kiekvienam elektrinės tipui užrašykite funkciją, kurios argumentas yra metų skaičius x , o funkcijos reikšmė nurodo, kokios vertės yra per x metų elektrinės pagaminta elektra.

3 užduotis

Šeima nusprendė įsirengti B tipo elektrinę. Atlikus skaičiavimus buvo sudaryta funkcija $f(x)$, kurios reikšmė nurodo, koks yra bendras investicijos atsipirkimas eurai po x metų. Pavyzdžiui, $f(0) = -7200$, nes pradinio momentu šeima išleido 7200 eurų elektrinei, tačiau ji dar nespėjo atsipirkti.

Nustatykite, kam lygi ši funkcija $f(x)$.

Apskaičiuokite, po kiek metų B tipo elektrinės pagaminta elektra atpirks šios elektrinės kainą.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Apskaičiuojame, kiek per metus šeima turės pirkti papildomai elektros: $5000 - 3000 = 2000 \text{ kWh}$.	1	Už teisingai apskaičiuotą papildomai perkamos elektros kiekį.
Už papildomą elektrą reikės sumokėti: $2000 \cdot 0,2 = 400 \text{ Eur}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
A tipui: $f_A(x) = 0,2 \cdot 3000 \cdot x = 600x$.	1	Už nurodytą teisingą funkciją.
B tipui: $f_B(x) = 0,2 \cdot 4500 \cdot x = 900x$.	1	Už nurodytą teisingą funkciją.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Funkcija $f(x)$ lygi: $f(x) = 900x - 7200$.	1	Už nustatytą teisingą funkciją.
Elektrinė atsipirks, kai galios lygybė: $0 = 900x - 7200$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą funkciją prilyginti nuliui.
Gauname: $x = \frac{7200}{900} = 8$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite, kiek elektros per metus šeima turės įsigyti papildomai. Iš viso per metus suvartojamos elektros kiekio atimkite elektrinės pagamintą elektros kiekį.

2 užuomina. Padauginkite elektros kiekį iš 1 kWh kainos ir apskaičiuokite, kiek šeimai kainuos papildoma elektra.

2 užduotis

1 užuomina. Kiek kiekviena elektrinė pagamina elektros per metus? Kokia kiekvienos elektrinės per metus pagamintos elektros kaina?

2 užuomina. Sudarykite dvi funkcijas $f_A(x)$ ir $f_B(x)$: sudauginkite kiekvienos elektrinės per metus pagamintos elektros kainą su dydžiu, nusakančiu, kiek metų elektra gaminta.

3 užduotis

1 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad funkcija $f(x)$ atitinka tiesinę funkciją $f(x) = ax + b$, kur a – per metus pagaminamos elektros kaina, o b – pradinės investicijos suma. Laikykite, kad $b < 0$, nes pradinės investicijos metu pinigai buvo sumokėti.

2 užuomina. Kai nustatysite funkciją $f(x)$, pagalvokite, kokia jos reikšmė rodytų, kad elektrinė atsipirko.

3 užuomina. Išspręskite tiesinę lygtį $f(x) = 0$. Nustatykite, su kokia argumento x reikšme ji galioja.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Modeliai ir sąryšiai	Tiesiniai ir netiesiniai sąryšiai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Slenkstinis	2
2			Tiesiniai ir netiesiniai sąryšiai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
3			Tiesiniai ir netiesiniai sąryšiai	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3

Paieškų sistemos

Bendroji įvestis

Kasdien sukuriami milijonai naujų interneto svetainių, tačiau tik dalis jų pasiekia aukštas pozicijas paieškos rezultatuose. Norint, kad svetainė būtų aukštai reitinguojama, svarbu suprasti, kaip veikia paieškos sistemų algoritmai.

Viena iš paieškos sistemų svetainės reitinguoja pagal šiuos veiksnius:

- lankytojų skaičių (L) – kuo daugiau žmonių apsilanko svetainėje, tuo ji laikoma populiarese;
- raktinių žodžių kiekį (R) – jei puslapyje dažnai naudojami populiarūs raktiniai žodžiai, jis gali būti lengviau randamas;
- turinio kokybę (T), kuri lemia svetainės aktualumą vartotojams.

Analitikai nustatė, kad jų nagrinėjamos interneto svetainės populiarumui (P) galioja tokia formulė:

$$P = 2 \cdot T \cdot L + 1,5 \cdot R.$$

Užduotys

1 užduotis

Tarkime, kad interneto puslapis per dieną sulaukė 200 lankytojų, jame buvo pavartota 110 raktinių žodžių, o turinio kokybė buvo lygi 0,8. Apskaičiuokite P reikšmę.

2 užduotis

Naujas interneto puslapis nuo pirmos dienos sulaukia 1 000 lankytojų per dieną, vėliau jo lankytojų skaičius (L) kiekvieną mėnesį yra 10 % didesnis nei prieš tai buvusį mėnesį. Apskaičiuokite, kiek lankytojų puslapis turės po 3 mėnesių.

3 užduotis

Kad būtų padidintas interneto puslapio populiarumas (P), galima parinkti vieną iš dviejų strategijų.

- Pirmoji strategija: didinti lankytojų srautą, kuris kiekvieną mėnesį būtų 100 vienetų didesnis nei prieš tai buvusį mėnesį.
- Antroji strategija: didinti raktinių žodžių skaičių, kuris kiekvieną mėnesį būtų 100 vienetų didesnis nei prieš tai buvusį mėnesį.

Nustatykite, kokia turėtų būti T reikšmė, kad pirmoji strategija per mėnesį padidintų svetainės populiarumą (P) labiau nei antroji strategija.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Įsistatome $L = 200$, $R = 110$ ir $T = 0,8$ į populiarumo (P) formulę: $P = T \cdot 2L + 1,5R = 0,8 \cdot 2 \cdot 200 + 1,5 \cdot 110$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (L, R ir T reikšmių įsistatymą į P formulę)
Gauname: $P = 0,8 \cdot 2 \cdot 200 + 1,5 \cdot 110 = 485$. Ats.: P = 485.	1	Už gautą teisingą atsakymą (P reikšmę).

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Lankytojų skaičius po 3 mėnesių lygus: $L = 1000 \cdot \frac{110}{100} \cdot \frac{110}{100} \cdot \frac{110}{100}$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Gauname: $L = 1000 \cdot \frac{110}{100} \cdot \frac{110}{100} \cdot \frac{110}{100} = 1331$. Ats.: L = 1331.	1	Už gautą teisingą atsakymą (L reikšmę).

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Padidinus L 100 vienetų, P padidės: $T \cdot 2 \cdot 100 = 200 \cdot T$.	1	Už gautą teisingą atsakymą, kiek vienetų padidės P pirmosios strategijos atveju.
Padidinus R 100 vienetų, P padidės: $1,5 \cdot 100 = 150$.	1	Už gautą teisingą atsakymą, kiek vienetų padidės P antrosios strategijos atveju.
Pirmoji strategija svetainės populiarumą padidins labiau, jeigu galios nelygybė: $200 \cdot T > 150$, todėl $T > \frac{150}{200} = 0,75$. Ats.: pirmoji strategija labiau didins populiarumą nei antroji, jeigu $T > 0,75$.	1	Už gautą teisingą atsakymą, su kokia T reikšme pirmoji strategija padidins P labiau nei antroji.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Nustatykite, kam lygios L , R ir T reikšmės.

2 užuomina. Atkreipkite dėmesį į sąlygoje pateiktą P formulę. Jeigu žinote, kad $L = 200$, $R = 110$ ir $T = 0,8$, kokią tuomet P reikšmę gaunate?

2 užduotis

1 užuomina. Kam lygus lankytojų skaičius (L) po 1 mėnesio? Iš kokio dydžio turite padauginti 1 000?

2 užuomina. Kad apskaičiuotumėte, kam lygus lankytojų skaičius po 3 mėnesių, 3 kartus padauginkite 1 000 iš nustatyto daugiklio, atitinkančio 10 % prieaugį.

3 užduotis

1 užuomina. Atkreipkite dėmesį į sąlygoje pateiktą P formulę. Pagal pirmąją strategiją: jeigu L reikšmę padidiname 100 vienetų, kiek tuomet padidėja P reikšmė?

2 užuomina. Pagal antrąją strategiją: jeigu R reikšmę padidiname 100 vienetų, kiek tuomet šis R reikšmės prieaugis padidina P reikšmę?

3 užuomina. Palyginkite, kiek padidėja P taikant vieną ir kitą strategiją. Užrašykite nelygybę su T reikšme, kuri atitinka sąlygą, kad pirmosios strategijos P padidėjimas yra didesnis nei antrosios strategijos P padidėjimas. Išspręskite gautą nelygybę ir atsakyme pateikite T įvertį.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Modeliai ir sąryšiai	Algebra	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Algebra	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	2
3			Algebra	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Aukštesnysis	3

Įrašų populiarumo vertinimo algoritmai

Bendroji įvestis

Socialiniai tinklai, tokie kaip „Instagram“, „TikTok“ ar „Facebook“, naudoja algoritmus, kurie padeda nustatyti, kurie įrašai yra populiariausi ir kuriuos reikėtų rodyti daugiau žmonių. Kuo daugiau žmonių spaudžia „patinka“, komentuoja ar dalinasi įrašu, tuo didesnė tikimybė, kad algoritmas jį iškels į naujienų srauto viršų.

Įsivaizduokite, kad esate socialinio tinklo analitikė ar analitikas ir turite prieigą prie **10 000 įrašų duomenų rinkinio**, kuriame pateikiama informacija apie kiekvieno įrašo:

- Pasiekiamumą (kiek žmonių matė įrašą),
- Patiktukų skaičių,
- Komentarų skaičių,
- Pasidalinimų skaičių.

Jūsų užduotis – sukurti matematinį modelį, kuris leistų nuspėti būsimo įrašo populiarumą, remiantis ankstesnių įrašų duomenimis. Išanalizuokite duomenis ir pabandykite nustatyti šių kintamųjų dėsninę sąryšį.

Užduotys

1 užduotis

Įsitraukimo indeksas – tai skaičius, kuris rodo, kiek žmonių aktyviai sureagavo į įrašą. Socialiniuose tinkluose jis dažniausiai apskaičiuojamas sudedant visas reakcijas: patiktukų, komentarų ir pasidalinimų skaičių.

Išnagrinėjus 10 000 įrašų duomenų rinkinį, buvo nustatyta, kad įrašo įsitraukimo indeksas (E) priklauso nuo jo pasiekiamumo (R) pagal tiesinę priklausomybę:

$$E = 0,015R + 500.$$

Kiek žmonių turi pasiekti įrašas, jei norime, kad jo įsitraukimo indeksas būtų 50 000?

2 užduotis

Išnagrinėjus 10 000 įrašų duomenų rinkinį, pastebėta, kad įsitraukimo indeksą (E) galima aprašyti ir tokia funkcija:

$$E = 2L + 3C + 5S.$$

Čia L – patiktukų skaičius, C – komentarų skaičius, S – pasidalinimų skaičius.

Norint, kad įsitraukimo indeksas būtų 5 000, kiek pasidalinimų reikėtų vienam įrašui, jei jis surenka 120 patiktukų ir 25 komentarus?

3 užduotis

Po savaitės buvo surinkti nauji duomenys apie populiariausius įrašus. Štai dalis rezultatų:

Įrašas	Pasiekiamumas	Faktinis įsitraukimas	Prognuozuotas įsitraukimas
A	500 000	8 000	...
B	1 500 000	24 000	...
C	3 000 000	48 000	...

Kurio įrašo duomenys nukrypsta nuo formulės $E = 0,015R + 500$ labiausiai (didžiausiu vienetų skaičiumi)?

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Įsistatome duomenis į sąlygoje pateiktą lygybę ir gauname: $50000 = 0,015 \cdot R + 500$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą į lygtį įsistatyti duomenis.
Išsprendžiame lygtį ir gauname: $R = 3\,300\,000$.	1	Už gautą teisingą atsakymą (išspręstą lygtį).

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Įsistatome duomenis į sąlygoje pateiktą lygybę ir gauname: $5000 = 2 \cdot 120 + 3 \cdot 75 + 5 \cdot S$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą įsistatyti į funkciją duomenis.
Išsprendžiame lygtį ir gauname: $S = 907$.	1	Už gautą teisingą atsakymą (išspręstą lygtį).

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Įrašo A prognozuojamas įsitraukimas: $0,015 \cdot 500000 + 500 = 8000$.	1	Už įrašo A prognozuojamo įsitraukimo apskaičiavimą.
Įrašo B prognozuojamas įsitraukimas: $0,015 \cdot 1500000 + 500 = 23000$.	1	Už įrašo B prognozuojamo įsitraukimo apskaičiavimą.
Įrašo C prognozuojamas įsitraukimas: $0,015 \cdot 3000000 + 500 = 45500$.	1	Už įrašo C prognozuojamo įsitraukimo apskaičiavimą.
Iš pateiktos lentelės matome, kad įrašo C prognozė labiausiai neatitinka faktinių duomenų.	1	Už padarytą teisingą išvadą apie didžiausią nuokrypį nuo prognozės.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Įsistatykite sąlygoje pateiktus duomenis į lygtį $E = 0,015R + 500$.

2 užuomina: Kai įsistatysite sąlygoje pateiktą E reikšmę, apskaičiuokite, kam lygi R reikšmė.

2 užduotis

1 užuomina. Įsistatykite sąlygoje pateiktus duomenis į lygtį $P = 2L + 3C + 5S$.

2 užuomina. Kai įsistatysite sąlygoje pateiktas P, L ir C reikšmes, apskaičiuokite, kam lygi S reikšmė.

3 užduotis

1 užuomina. Pagal pateiktą formulę apskaičiuokite įrašų A, B ir C prognozuojamą įsitraukimą.

2 užuomina. Palyginkite apskaičiuotą įrašų A, B ir C prognozuojamą įsitraukimą su lentelėje pateiktu faktiniu įsitraukimu. Nustatykite, kurio įrašo prognozuojamo ir faktinio įsitraukimo duomenų neatitikimas yra didžiausias.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Modeliai ir sąryšiai	Algebra	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Algebra	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	2
3			Algebra	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Aukštesnysis	4

Komandos dydžio planavimas

Bendroji įvestis

„Asana“ – tai viena populiariausių užduočių ir projektų valdymo platformų, naudojama darbams organizuoti, pažangai sekti ir komandos pajėgumams planuoti. Ji leidžia suskirstyti darbus į mažesnes užduotis, priskirti atsakomybes ir stebėti, kaip jos atliekamos pagal nustatytus terminus.

„Asana“ taškai (angl. *story points*) – tai projektų valdymo komandų naudojamas metodas, skirtas užduočių sudėtingumui įvertinti. Jie ne parodo, kiek laiko reikės užduočiai atlikti, bet nusako pastangų, rizikos ir sudėtingumo lygį.

Toliau pateikta orientacinė lentelė, skirta darbo trukmei planuoti. Joje nurodyta, kiek „Asana“ taškais įvertintų darbų vidutiniškai gali atlikti kiekvienas komandos narys per dieną, atsižvelgiant į jo turimą patirtį.

Lygis	„Asana“ taškai per dieną	Darbuotojo išlaikymo sąnaudos
Pradedantysis	5	100 Eur/diena
Vidutiniškai patyręs specialistas	10	160 Eur/diena
Patyręs specialistas	15	250 Eur/diena

Pastaba. Tikslių taškų skaičių lemia įmonės specifika. Tokia planavimo sistema leidžia lengviau įvertinti, kiek išteklių reikia užduotims atlikti.

Taikant „Asana“ taškų sistemą, galima spręsti įvairius komandos dydžio planavimo klausimus, susijusius su darbų apimtimis ir jų atlikimo trukme.

Užduotys

1 užduotis

Įmonė vykdo projektą, kuris turi būti užbaigtas per 6 darbo dienas. Projekto sudėtingumas – 360 „Asana“ taškų. Komandoje jau dirba 1 vidutiniškai patyręs specialistas ir 1 patyręs specialistas. Kiek reikia papildomų pradedančiųjų darbuotojų, kad projektas būtų baigtas laiku, jei visi darbuotojai dirbs visas 6 dienas?

2 užduotis

Įmonė vykdo projektą, kurio planuojama apimtis yra 600 „Asana“ taškų. Jį būtina užbaigti per 6 dienas. Įmonė gali šiam projektui skirti 10 asmenų, tačiau tik vidutiniškai patyrusių ir pradedančiųjų. Kiek pradedančiųjų ir vidutiniškai patyrusių darbuotojų reikėtų, kad šis projektas būtų užbaigtas laiku? Visi darbuotojai dirbtų visas 6 dienas. Savo atsakymą pagrįskite.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
<i>1 būdas</i>		
Jei per 6 dienas reikia atlikti darbų, įvertintų 360 taškų, tai per 1 dieną reikia atlikti darbų, įvertintų: $360 : 6 = 60$ taškų.	1	Už teisingai apskaičiuotą taškų skaičių per 1 dieną.
Dviejų darbuotojų darbo našumas vertinamas: $10 + 15 = 25$ taškais, todėl papildomai reikės darbuotojų, kurie atliktų darbų, vertinamų: $60 - 25 = 35$ taškais.	1	Už teisingą apskaičiavimą, kiek taškų papildomai reikia surinkti per 1 dieną.
Papildomai reikės $35 : 5 = 7$ pradedančiųjų darbuotojų. Ats.: 7.	1	Už gautą teisingą atsakymą (pradedančiųjų darbuotojų skaičių).
<i>2 būdas</i>		
Apskaičiuojame, kiek „Asana“ taškų esami darbuotojai surinks per 6 dienas: $25 \cdot 6 = 150$.	1	Už apskaičiuotą esamų darbuotojų taškų skaičių per 6 dienas.
Apskaičiuojame, kiek taškų lieka: $360 - 150 = 210$.	1	Už teisingą apskaičiavimą, kiek taškų papildomai reikia surinkti per 6 dienas.
Apskaičiuojame, kiek reikia pradedančiųjų darbuotojų 210 taškų surinkti per 6 dienas: $210 : (6 \cdot 5) = 7$. Ats.: 7.	1	Už gautą teisingą atsakymą (pradedančiųjų darbuotojų skaičių).

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Tarkime, x – vidutiniškai patyrusių darbuotojų skaičius. Tada $10 - x$ yra pradedančiųjų darbuotojų skaičius. Sudarome lygtį: $10x + 5(10 - x) = 100$. <i>arba</i> $60x + 30(10 - x) = 600$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą sudaryti lygtį.
Išsprendžiame lygtį ir gauname: $x = 10$.	1	Už gautą teisingą lygties sprendinį.
Ats.: 10 vidutiniškai patyrusių darbuotojų ir 0 pradedančiųjų darbuotojų.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Jei pateikiamas teisingas atsakymas, tačiau nesudaryta lygtis ir nenurodytas sprendimas, skiriamas 1 taškas.		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Nustatykite, už kiek taškų jau komandoje esantys darbuotojai atliks darbų. Pagal tai apskaičiuokite, kiek „Asana“ taškų turi surinkti nauji pradedantieji darbuotojai, jei užduoties darbinė apimtis įvertinta 360 „Asana“ taškų.

2 užuomina. Jei kiekvienas pradedantysis darbuotojas per dieną atlieka darbų už 5 taškus, kiek reikėtų pradedančiųjų darbuotojų, kad per 6 dienas surinktų trūkstamą taškų skaičių?

2 užduotis

1 užuomina. Tarkime, x – vidutiniškai patyrusių darbuotojų skaičius. Kam tada lygus pradedančiųjų darbuotojų skaičius?

2 užuomina. Žinote, kad vidutiniškai patyręs darbuotojas per dieną atlieka darbų, įvertintų 10 taškų, o pradedantysis – įvertintų 5 taškais. Remkitės šia informacija ir sudarykite lygtį. Kai ją išspręsite, atsakykite, kiek vidutiniškai patyrusių ir kiek pradedančiųjų darbuotojų reikia.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Modeliai ir sąryšiai	Algebra	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Patenkinamas	3
2			Tiesiniai ir netiesiniai sąryšiai	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3

Vaistiniai tirpalai

Bendroji įvestis

Vaistinėje ruošama nauja vaistinio tirpalo partija. Tirpalo vaistinės medžiagos masės koncentracija turi būti tiksliai 25 % tirpalo masės. Vaistininkai gali naudoti du skirtingus tirpalus:

- silpnąjį tirpalą, kuriame veikliosios medžiagos masės koncentracija yra 10 %;
- stiprųjį tirpalą, kuriame veikliosios medžiagos masės koncentracija yra 50 %.

Norint gauti reikiamą koncentraciją, šiuos du tirpalus reikia sumaišyti tiksliomis proporcijomis.

Užduotys

1 užduotis

Kiek gramų silpnojo ir stipriojo tirpalo reikia sumaišyti, jeigu norima pagaminti 100 g tirpalo, kurio vaistinės medžiagos masės koncentracija 25 %?

2 užduotis

Vaistininkė nori pagaminti 100 g vaistinio tirpalo ir svarsto praskiesti stiprųjį tirpalą vandeniu. Ar būtų įmanoma pasiekti 25 % koncentraciją, jei būtų naudojama daugiau nei 60 g vandens? Atsakymą pagrįskite.

3 užduotis

Vaistininkas gavo užduotį – pagaminti 5 % koncentracijos tirpalą. Jis lygina du būdus, kuriais galima pagaminti produktą – skiedžiant silpnąjį tirpalą arba skiedžiant stiprųjį tirpalą. Medžiagų kainos yra tokios:

- silpnojo tirpalo kaina 0,5 Eur/g;
- stipriojo tirpalo kaina 2 Eur/g;
- vanduo nemokamas.

Kuriuo būdu būtų pigiau pagaminti 5 % koncentracijos tirpalą – skiedžiant silpnąjį ar stiprųjį tirpalą? Atsakymą pagrįskite skaičiavimais.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Silpnojo tirpalo masę pažymime A, stipriojo tirpalo masę pažymime B, pagal sąlygą gauname: $\begin{cases} A + B = 100, \\ 0,1 \cdot A + 0,5 \cdot B = 100 \cdot 0,25. \end{cases}$ arba $0,1 \cdot (100 - B) + 0,5 \cdot B = 100 \cdot 0,25;$ arba $0,1 \cdot A + 0,5 \cdot (100 - A) = 100 \cdot 0,25.$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (sudarytą lygtį arba lygčių sistemą).
Silpnojo tirpalo reikės sumaišyti: 63,5 g.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Stipriojo tirpalo reikės sumaišyti: 36,5 g.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Lygčių sistema arba lygtis gali būti sudaryta ir su kitais teisingais daugikliais, pvz., 10 ir 50 vietoje 0,1 ir 0,5.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Jei su vandeniu maišomo tirpalo masė būtų mažesnė nei 40 g, tuomet mišinyje medžiagos masė arba koncentracija būtų mažiau nei: $40 \cdot 0,5 = 20 \text{ g};$ arba $0,4 \cdot 20 = 20 \text{ \%}.$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą ir apskaičiuotą medžiagos masės arba koncentracijos įvertį mišinyje.
Ats.: kadangi $20 < 25$, gauname, kad nepavyktų pasiekti 25 % koncentracijos.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Jei pasirinktas kitas teisingas sprendimo būdas ir gautas teisingas atsakymas, skiriami 2 taškai.		

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
1 būdas		
Jei x gramų 10 % koncentracijos tirpalo skiedžiame vandeniu, tuomet turi galioti: $0,1 \cdot x = 0,05 \cdot 100,$ todėl $x = 50 \text{ g}.$	1	Už apskaičiuotą silpnojo tirpalo masę, reikalingą 5 % tirpalui pagaminti.
Jei x gramų 50 % koncentracijos tirpalo skiedžiame vandeniu, tuomet turi galioti: $0,5 \cdot x = 0,05 \cdot 100,$ todėl $x = 10 \text{ g}.$	1	Už apskaičiuotą stipriojo tirpalo masę, reikalingą 5 % tirpalui pagaminti.

50 gramų 10 % koncentracijos tirpalo kaina: $0,5 \cdot 50 = 25$ Eur.	1	<i>Už apskaičiuotą silpnojo tirpalo kainą.</i>
10 gramų 50 % koncentracijos tirpalo kaina: $2 \cdot 10 = 20$ Eur.	1	<i>Už apskaičiuotą stipriojo tirpalo kainą.</i>
Ats.: kadangi $25 > 20$, pigiau būtų gaminti skiedžiant stiprųjį tirpalą.	1	<i>Už gautą teisingą atsakymą ir jo pagrindimą.</i>
2 būdas		
Kadangi vanduo nemokamas, galime palyginti medžiagos kainas silpnajame ir stipriajame tirpale.	2	<i>Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.</i>
Medžiagos kaina pagal 1 g silpnojo tirpalo: 0,1 g – 0,5 Eur, todėl 1 g – 5 Eur.	1	<i>Už apskaičiuotą 1 g medžiagos kainą pagal silpnąjį tirpalą.</i>
Medžiagos kaina pagal 1 g stipriojo tirpalo: 0,5 g – 2 Eur, todėl 1 g – 4 Eur.	1	<i>Už apskaičiuotą 1 g medžiagos kainą pagal stiprųjį tirpalą.</i>
Ats.: kadangi $4 < 5$, pigiau būtų gaminti skiedžiant stiprųjį tirpalą.	1	<i>Už gautą teisingą atsakymą ir jo pagrindimą.</i>

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Silpnojo tirpalo masę pažymėkite raide A, stipriojo tirpalo masę – raide B. Žinoma, kad iš viso turi būti panaudota 100 g medžiagų ir turi būti gauta 25 % koncentracija. Kokią lygčių sistemą galima sudaryti pagal šią informaciją?

2 užuomina. Prisiminkite, kad medžiagos masė tirpale lygi tirpalo koncentracijai, padaugintai iš tirpalo masės. Pagal tai sudarykite lygtį, kurios vienoje pusėje būtų išreikšta medžiagos masė iš dviejų tirpalų, o kitoje pusėje – galutinio produkto medžiagos masė. Atkreipkite dėmesį, jeigu A ir B masės suma yra 100 g, tuomet galime vieną iš šių dydžių išreikšti per kitą.

2 užduotis

1 užuomina. Jei bent 60 g iš 100 g mišinio bus paprastas vanduo, tuomet kokia masė iš 100 g gali būti stipriojo tirpalo?

2 užuomina. Jeigu bus pilama didžiausia pagal sąlygą galima stipriojo tirpalo masė, kokia bus medžiagos koncentracija, kai atskiesite tirpalą su paprastu vandeniu? Palyginkite gautą skaičių su sąlygoje pateikta reikiama tirpalo koncentracija. Pagal tai padarykite išvadą, ar įmanoma pagaminti tokį tirpalą pagal pateiktas sąlygas.

3 užduotis

1 užuomina. Kokią masę 10 % koncentracijos tirpalo reikėtų skiesti vandeniu, kad būtų pagaminta 100 g 5 % mišinio? Apskaičiuokite, kiek kainuotų tokia masė 10 % koncentracijos tirpalo, jei žinote, kad 1 g kainuoja 0,5 Eur.

2 užuomina. Kokią masę 50 % koncentracijos tirpalo reikėtų skiesti vandeniu, kad būtų pagaminta 100 gramų 5 % mišinio? Apskaičiuokite, kiek kainuotų tokia masė 50 % koncentracijos tirpalo, jei žinote, kad 1 g kainuoja 2 Eur. Palyginkite gautas kainas ir padarykite išvadą, kuriuo būdu gaminti pigiau.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Modeliai ir sąryšiai	Algebra	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3
2			Algebra	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	2
3			Algebra	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	5

Vaistų koncentracija kraujyje

Bendroji įvestis

Pacientui išgėrus vaistų, jų koncentracija kraujyje iš pradžių didėja, kol pasiekia maksimalią reikšmę. Tada, kai organizmas pradeda vaistus skaidyti ir šalinti, koncentracija pradeda mažėti.

Farmacijos mokslininkai pastebėjo, kad kai kurių vaistų koncentraciją kraujyje galima išreikšti kvadratine funkcija, pavyzdžiui:

$$C(t) = -at^2 + bt$$

Čia:

- $C(t)$ – vaisto koncentracija kraujyje po t valandų,
- a ir b – teigiamos konstantos, priklausančios nuo vaisto savybių,
- t – laikas (valandomis).

Mokslininkai nori išanalizuoti šią funkciją ir nustatyti, kada vaistas veikia stipriausiai ir per kiek laiko jo poveikis išnyksta.

Užduotys

1 užduotis

Vaisto koncentracija kraujyje po t valandų išreikšta funkcija:

$$C(t) = -2t^2 + 8t.$$

Vaistas patenka į kraują ir pradeda veikti, kai $t = 0$. Po kiek laiko koncentracija taps lygi 0 mg/l?

2 užduotis

Vaisto koncentracija kraujyje iš pradžių kyla, pasiekia maksimumą ir po to pradeda mažėti. Vaisto koncentracija išreikšta lygtimi:

$$C(t) = -0,5t^2 + 4t.$$

Po kiek laiko koncentracija pasiekia maksimumą?

3 užduotis

Mokslininkai nori sukurti optimalų vaistinį mišinį, kurio veiklioji medžiaga, išgėrus vaistų, pasiektų ne mažesnę kaip 20 mg/l maksimalią koncentraciją, bet neviršytų 40 mg/l. Mokslininkai pagamino du skirtingus vaistinius mišinius:

1 mišinys: $C_1(t) = -0,2t^2 + 4t$,

2 mišinys: $C_2(t) = -0,3t^2 \pm 9t$.

Nustatykite, ar šie mišinių variantai atitinka mokslininkų reikalavimus.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
1 būdas		
Gauname lygtį: $0 = -2t^2 + 8t$.	1	Už sudarytą teisingą lygtį.
Iškeliame panašiuosius narius ir gauname: $0 = -2t(t - 4)$.	1	Už pasirinktą teisingą lygties sprendimo būdą iškelti panašiuosius narius.
Sprendiniai: 0 ir 4. Ats.: po 4 valandų.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
2 būdas		
Gauname lygtį: $0 = -2t^2 + 8t$.	1	Už sudarytą teisingą lygtį.
Kvadratinės lygties diskriminantas: $D = 8^2 = 64$.	1	Už pasirinktą teisingą lygties sprendimo būdą apskaičiuoti diskriminantą.
Sprendiniai: $t_1 = -\frac{-8+8}{-4} = 0$ ir $t_2 = -\frac{-8-8}{-4} = 4$. Ats.: po 4 valandų.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Parabolės viršūnės taško abscisė lygi: $x = \frac{-b}{2a}$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą pritaikyti parabolės viršūnės formulę.
Išsistatome $a = -0,5$, $b = 4$ ir gauname: $x = \frac{-4}{2 \cdot (-0,5)} = 4$. Ats.: po 4 valandų.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
1 mišinys Parabolės viršūnės taško abscisė lygi: $\frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-0,4} = 10$.	1	Už apskaičiuotą parabolės viršūnės abscisę (1 mišinio).

Su $t = 10$ įgyjama reikšmė: $C_1(10) = -0,2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 = 20 \text{ mg/l}$. .	1	<i>Už apskaičiuotą parabolės viršūnės ordinatę (1 mišinio).</i>
2 mišinys Parabolės viršūnės taško abscisė lygi: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-9}{-0,6} = 15$.	1	<i>Už apskaičiuotą parabolės viršūnės abscisę (2 mišinio).</i>
Su $t = 15$ įgyjama reikšmė: $C_2(15) = -0,3 \cdot 15^2 + 9 \cdot 15 = 67,5 \text{ mg/l}$. 2 mišinys: 67,5 mg/l → neviršija viršutinės ribos → neatitinka reikalavimų.	1	<i>Už apskaičiuotą parabolės viršūnės ordinatę (2 mišinio).</i>
Ats.: 1 mišinys atitinka reikalavimus 2 mišinys neatitinka reikalavimų	1	<i>Už padarytą teisingą išvadą.</i>

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Su kokia t reikšme galioja lygybė $C(t) = 0$?

2 užuomina. Sąlygoje pateiktoje formulėje $C(t) = -2t^2 + 8t$ laikykite, kad $C(t) = 0$. Sudarykite lygtį, iškelkite panašiuosius narius arba pritaikykite kvadratinės lygties sprendinių formulę ir išspręskite lygtį.

2 užduotis

1 užuomina. Pagalvokite, kokia yra parabolės viršūnės abscisės formulė.

2 užuomina. Įsistatykite sąlygoje duotus dydžius $a = -0,5$ ir $b = 4$ į parabolės viršūnės abscisės formulę $\frac{-b}{2a}$. Nustatysite, po kiek valandų bus pasiekta didžiausia reikšmė.

3 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite abiejų lygčių (mišinių) parabolės viršūnės koordinates.

2 užuomina. Pritaikykite parabolės viršūnės abscisės formulę $\frac{-b}{2a}$ ir nustatykite, su kokiomis t reikšmėmis kiekvienu atveju pasiekama maksimali koncentracijos reikšmė. Tada įsistatykite gautas reikšmes į atitinkamas lygtis ir nustatykite maksimalią pasiekiamą 1 ir 2 mišinių koncentraciją. Palyginkite, ar šie dydžiai atitinka sąlygoje pateiktus reikalavimus.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Modeliai ir sąryšiai	Algebra	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3
2			Tiesiniai ir netiesiniai sąryšiai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	2
3			Tiesiniai ir netiesiniai sąryšiai	Matematinis problemų sprendimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	5

Grindų plytelės

Bendroji įvestis

Prieš klojant grindų plyteles, būtina apskaičiuoti, kiek jų reikia konkrečiam plotui. Plytelių būna skirtingų matmenų, todėl renkantis tinkamiausią variantą svarbu įvertinti, kiek plytelių ir jų pakuočių būtina įsigyti.

Plytelės parduodamos pakuotėmis, kuriose yra tam tikras skaičius vienodo dydžio kvadratinių plytelių. Reikia rasti geriausią variantą – išsirinkti tokių matmenų (t. y. kraštinės ilgio) plyteles, kad reikėtų kuo mažiau pakuočių ir neliktų nepanaudotų plytelių.

Užduotys

1 užduotis

Reikia iškloti grindis, kurių matmenys $1,2 \times 4$ m. Pakuotėje yra vienodo dydžio kvadratinės plytelės, kurių kraštinės ilgis – 40 cm. Plytelės parduodamos pakuotėmis po x vienetų. Sudarykite ir išspręskite lygtį, pagal kurią būtų galima apskaičiuoti, kiek plytelių turi būti pakuotėje, kad užtektų lygiai vienos pakuotės.

2 užduotis

Grindų matmenys yra 9×6 m. Galima pasirinkti vieną iš dviejų plytelių dydžių:

- 1 variantas: 40×40 cm;
- 2 variantas: 60×60 cm.

Kiekvienoje pakuotėje yra po 10 plytelių. Plytelės pjaustomos tik tada, kai eilėje netelpa sveikasis skaičius plytelių. Likučiais laikomos visos nepanaudotos plytelės arba jų atpjautos dalys, kurių negalima panaudoti grindų plotui iškloti.

Kurias plyteles verta naudoti labiau, jei tikslas – turėti kuo mažiau likučių (t. y. nepanaudotų plytelių ir jų dalių)? Pateikite sprendimą.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Vienoje pakuotėje esančių plytelių užtenka tokiam plotui: $x \cdot 40^2 \text{ cm}^2$; arba $x \cdot 0,4^2 \text{ m}^2$.	1	Už teisingai apskaičiuotą, kokiam plotui užtenka vienoje pakuotėje esančių plytelių.
Sudarome lygtis (centimetrais): $120 \cdot 800 = x \cdot 40^2$ $48000 = x \cdot 1600$ arba (metrais): $1,2 \cdot 8 = x \cdot 0,4^2$ $4,8 = x \cdot 0,16$	1	Už sudarytą teisingą lygtį.
Išsprendžiame lygtį: $x = \frac{4,8}{0,16} = 30$ arba $x = \frac{48000}{1600} = 30$ Ats.: vienoje pakuotėje turi būti 30 plytelių .	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
Pasirinkus 1 varianto plyteles: palei 6 m kraštinę plytelių telpa (sveikasis skaičius): $\frac{600}{40} = 15$. Palei 9 m kraštinę plyteles reikia pjaustyti, nes jų telpa ne sveikasis skaičius: $\frac{900}{40} = 22,5 \Rightarrow$ reikės 22 visų plytelių + 1 atpjautos plytelės pusės. Kadangi reikės 15 kartų po pusę plytelės (7 + 0,5 plytelės), pasirinkus šį variantą atliekų kiekis bus pusė plytelės.	1	Už apskaičiavimą, kiek plytelių telpa klojant 1 varianto plyteles palei 6 m ir 9 m kraštines.
Klojant 1 varianto plyteles: iš viso bus panaudotos: $330 + 7,5 = 337,5$ plytelės. Pakuočių skaičius: $\frac{337,5}{10} = 33,75 \Rightarrow 34$ pakuotės. Likę vienetai: $340 - 337,5 = 2,5$ plytelės (likučiai).	1	Už apskaičiavimą, kiek atliekų gaunama klojant 1 varianto plyteles.
Klojant 2 varianto plyteles: kadangi patalpos ilgis ir plotis (9 m ir 6 m) dalijasi iš 60 cm be liekanos: palei 9 m: $\frac{900}{60} = 15$ – tiksliai, palei 6 m: $\frac{600}{60} = 10$ – tiksliai.	1	Už apskaičiavimą, kiek plytelių telpa klojant 2 varianto plyteles palei 6 m ir 9 m kraštines.

Klojant 2 variantų plyteles : iš viso bus panaudota: $15 \cdot 10 = 150$ plytelių. Pakuočių skaičius: $\frac{150}{10} = 15$. Likučių nėra – viskas tiksliai išklota.	1	Už apskaičiavimą, kiek atliekų gaunama klojant 2 variantų plyteles.
Ats.: atliekų bus mažiau klojant 2 variantų plyteles.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite, kokiam plotui užtenka vienoje pakuotėje esančių plytelių.

2 užuomina. Kokiam plotui turi užtekti vienoje pakuotėje esančių plytelių? Pagal tai sudarykite lygtį. Atkreipkite dėmesį, kad abiejose lygties pusėse dydžiai turi būti pateikti tais pačiais vienetais (metrais arba centimetrais).

2 užduotis

1 užuomina. Išnagrinėkite, kaip būtų klojama, pasirinkus 1 varianto plyteles. Kiek plytelių telpa palei 6 m kraštinę? Kiek plytelių telpa palei 9 m kraštinę? Jeigu plyteles reikia pjauti, ar galima panaudoti likusią atpjautą dalį? Ar sunaudojamos visos atpjautos dalys?

2 užuomina. Išnagrinėkite, kaip būtų klojama, pasirinkus 2 varianto plyteles. Ar palei abi kraštines telpa sveikasis skaičius plytelių? Pagal tai, kiek kiekvienu atveju lieka atliekų, nustatykite, kada jų bus mažiau.

3 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad plytelės supakuotos po 10 vienetų. Kiek pakuočių plytelių reikės, jei pirktumėte 1 ir 2 variantų plyteles?

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Modeliai ir sąryšiai	Algebra	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	3
2			Dėsningumai	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	4

Objektų judėjimo modeliavimas kompiuteriniuose žaidimuose

Bendroji įvestis

Kompiuterinių žaidimų kūrėjams dažnai tenka modeliuoti objektų judėjimą. Vienas dažniausiai naudojamų matematinių modelių yra parabolė, kuri aprašo šuolius, metimus, sviedinių trajektorijas ir net tam tikrus vizualinius efektus.

Kai žaidime veikėjas pašoka, kamuolys skrieja krepšio link ar patrankos sviedinys lekia į taikinį, visi šie judesiai priklauso nuo gravitacijos. Fizikoje objektas, kurį veikia vien gravitacija, juda pagal kvadratinę funkciją, kuri sudaro parabolės formą:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Koeficientų a , b ir c parinkimas leidžia žaidimų kūrėjams kontroliuoti šuolio aukštį, trajektorijos ilgį, metimų tikslumą ir kitus parametrus.

Užduotys

1 užduotis

Kompiuteriniame žaidime metamas kamuolys. Jo trajektorija aprašoma formule:

$$y(x) = -0,5x^2 + Ax + 2,$$

kur y – kamuolio aukštis, x – horizontalus atstumas metrais nuo taško, iš kurio metamas kamuolys. Krepšys yra 4 m aukštyje ir pastatytas 6 m atstumu nuo metančiojo.

Kokia turi būti A reikšmė, kad kamuolys tiksliai įkristų į krepšį?

2 užduotis

Kompiuteriniame žaidime modeliuojamas veikėjo šuolis. Naudojama tokia formulė:

$$y(t) = -4t^2 + 8t,$$

kur y – veikėjo aukštis virš žemės metrais, t – laikas sekundėmis. Laikykite, kad šuolio pradžioje $t=0$ ir $y=0$, o didėjant t reikšmei šuolis baigiasi tuomet, kai y vėl įgyja nulio reikšmę.

Kokio aukščio yra veikėjo šuolis, t. y. kokia didžiausia y reikšmė?

Kiek sekundžių trunka veikėjo šuolis?

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Į trajektorijos formulę $y(x) = -0,5x^2 + Ax + 2$ įstatę krepšio tašką $(x; y) = (6; 4)$ gauname lygtį: $4 = -0,5 \cdot 6^2 + A \cdot 6 + 2$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (krepšio koordinatų įsistatymą į trajektorijos formulę).
Išsprendę lygtį gauname: $A = 3,5$. Ats.: kamuolys įkris į krepšį, kai $A = 3,5$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Kadangi parabolė yra su šakomis žemyn, ji didžiausią reikšmę įgyja viršūnėje: $t = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{-8} = 1$. <i>arba</i> Parabolės šaknys $t = 0$ ir $t = 2$, todėl maksimumas įgyjamas su $t = \frac{0+2}{2} = 1$.	1	Už nustatytą parabolės viršūnės abscisę.
Didžiausia y reikšmė: $y(1) = -4 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 = 4$.	1	Už nustatytą parabolės viršūnės ordinatę.
Kadangi parabolės šaknys $t = 0$ ir $t = 2$, šuolis trunka 2 sekundes. Ats.: didžiausia y reikšmė yra 4, šuolis trunka 2 sekundes.	1	Už nustatytą šuolio trukmę.
Pastabos		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Kokia sąlyga turi galioti kamuolio trajektorijos formulei, kad trajektorija eitų per krepšio tašką?

2 užuomina. Nustatykite krepšio x ir y koordinates, įsistatykite jas į trajektorijos funkciją. Išspręskite gautą lygtį nežinomojo A atžvilgiu.

2 užduotis

1 užuomina. Panagrinėkite duotą parabolę – kokias jos savybes galite pastebėti? Su kokia argumento reikšme parabolė pasieks savo didžiausią reikšmę?

2 užuomina. Nustatykite parabolės viršūnės x ir y koordinates. Taip pat nustatykite, koks skirtumas tarp t reikšmių, su kuriomis $y=0$. Taip išsiaiškinksite užduotyje prašomus nustatyti dydžius.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Modeliai ir sąryšiai	Algebra	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	2
2			Algebra	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Aukštesnysis	3

Dviračių nuomos punktas

Bendroji įvestis

Miesto dviračių nuomos paslauga skatina rinktis ekologišką transportą ir padeda mažinti automobilių spūstis. Pirmosios dviračio nuomos valandos kaina yra 8 eurai. Antroji, trečioji ir visos kitos valandos kainuoja po 5 eurus.

Dviračių nuomos paslaugos teikėjai svarsto įvairias kainų nustatymo strategijas, kurios leistų padidinti bendrąsias pajamas ir kartu skatintų žmones dažniau naudotis dviračiais.

Užduotys

1 užduotis

Dviračių nuomos paslaugos teikėjai nustatė, kad norint padengti kasdienės veiklos išlaidas ir išvengti nuostolių, vidutinės pajamos iš vieno kliento taikant dabartines kainas turi siekti 28 eurus. Kiek mažiausiai valandų klientas turi nuomotis dviratį, kad nuomos verslas nebūtų nuostolingas?

2 užduotis

Atlikti tyrimai parodė, kad nuomojamų dviračių skaičiaus priklausomybė nuo dviračio nuomos valandos kainos yra tiesinė: kiekvienas kainos už pirmąją valandą sumažinimas 1 euru padidina nuomojamų dviračių skaičių 2 vienetais. Apskaičiuokite, kokia pirmosios valandos nuomos kaina užtikrintų didžiausias pajamas, jeigu esant dabartinei kainai per dieną vidutiniškai išnuomojama 30 dviračių, o vidutinis dviratininkas nuomojasi dviratį 4 valandoms.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Sakykime, kad t – valandų skaičius, kiek buvo nuomojamas dviratis. Tuomet pagal sąlygoje pateiktus duomenis gauname lygtį (arba atitinkamą nelygybę): $28 = 8 + (t - 1) \cdot 5$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (sudarytą lygtį arba nelygybę).
Išsprendžiame lygtį (arba atitinkamą nelygybę) ir gauname: $t = 5$. Ats.: 5 valandos.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Jei teisingas atsakymas gaunamas kitu būdu, pvz., parodant, kaip skaičius 28 gaunamas sudedant aštuonetą ir penketus, tuomet irgi skiriami 2 taškai.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Sakykime, kad x – kiek eurų sumažiname pirmosios valandos kainą, y – kiek pinigų iš viso gaunama už dviračių nuomą. Sumažinus pirmosios valandos nuomos kainą x eurų, klientų padaugėtų $2x$ žmonėmis ir klientų būtų $30 + 2x$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (už nustatytą klientų skaičiaus priklausomybę nuo x , $(30 + 2x)$).
Vienas klientas sumokės vidutiniškai $8 - x$ eurų už pirmąją valandą ir 15 eurų už kitas 3 valandas, todėl gauname lygtį: $y = (30 + 2x)(8 - x + 15)$.	1	Už nustatytą vidutinį nuomai išleidžiamų pinigų kiekį $(23 - x)$.
Suprastiname lygtį ir gauname: $y = -2x^2 + 16x + 690$.	1	Už gautą teisingą kvadratinį trinarį.
Kadangi tai yra parabolė su šakomis žemyn, jos maksimumo taškas yra jos viršūnėje, t. y. kai: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{-4} = 4$. Ats.: optimali pirmos valandos kaina = 4 eurai.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Sakykime, kad dviratis buvo nuomojamas iš viso t valandų, čia $t > 1$. Kiek tuomet buvo sumokėta už pirmąją valandą? Už visas kitas valandas po pirmosios?

2 užuomina. Žinoma, kad nuomojantis dviratį t valandų yra vieną kartą sumokami 8 eurai ir $t - 1$ kartą sumokama po 5 eurus. Kam lygi iš viso sumokama suma? Prilyginkite šią sumą 28 eurams ir išspręskite gautą lygtį.

2 užduotis

1 užuomina. Sakykime, kad x – kiek eurų sumažiname pirmosios valandos kainą, y – kiek pinigų iš viso gaunama už dviračių nuomą. Kokią sąsają tarp x ir y galite užrašyti pagal sąlygoje pateiktus duomenis?

2 užuomina. Jei pradinė pirmosios valandos kaina yra 8 eurai ir ją sumažiname x eurai, kokia bus nauja pirmosios valandos kaina? Kiek sumokama už kitas 3 valandas? Sudėkite šiuos dydžius ir nustatykite, kiek vidutiniškai sumoka vienas klientas sumažinus kainą. Taip pat apskaičiuokite, kiek klientų bus po kainos sumažinimo. Žinote klientų skaičių ir vidutinį išleidžiamą pinigų kiekį, todėl galite sudauginti šiuos dydžius ir gausite reiškinį bendram pinigų kiekiui apskaičiuoti. Suprastinkite narius ir gausite funkciją, kurios grafikas – parabolė su šakomis žemyn. Prisiminkite parabolės viršūnės savybes ir apskaičiuokite atsakymą.

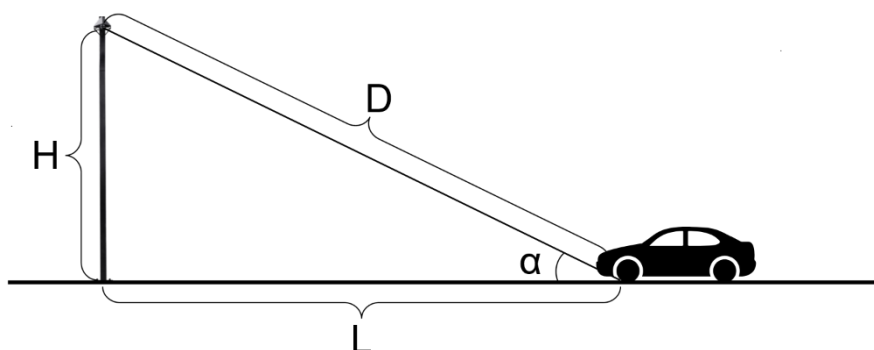
Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Modeliai ir sąryšiai	Tiesiniai ir netiesiniai sąryšiai.	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	2
2			Tiesiniai ir netiesiniai sąryšiai.	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	4

Šviesos jutiklis

Bendroji įvestis

Taikant modernias šviesos technologijas, galima lengvai apskaičiuoti aplinkoje esančių objektų dydžius ir greičius. Tam sukurta daug skirtingų metodų. Vienas iš būdų – nustatyti, koku kampu šviesos jutiklį pasiekia nuo objekto sklindantys šviesos spinduliai. Išmatavus šviesos spindulių sklidimo kampus, taikant stačiojo trikampio savybes ir trigonometrinius veiksmus, galima matematiškai apskaičiuoti įvairias objektų charakteristikas.



Užduotys

Šiose užduotyse laikoma, kad atstumas tarp automobilio lempų ir žemės paviršiaus yra lygus 0 metrų. Šviesos jutiklio aukštis virš žemės paviršiaus pažymimas raide H , automobilio atstumas iki stulpo su šviesos jutikliu – raide L , o atstumas tarp automobilio žibintų ir šviesos jutiklio – raide D . Kampas, kuriuo sklinda šviesos spinduliai, žymimas raide α .

1 užduotis

Šviesos jutiklis įtvirtintas 10 metrų aukščio stulpo viršūnėje (žr. pav.). Stulpas su lygiu keliu sudaro statų kampą. Šviesa nuo objekto jutiklį pasiekia 30° kampu. Nustatykite, koku atstumu nuo stulpo pagrindo yra objektas.

2 užduotis

Virš tiesaus, horizontalaus kelio pastatyta arka, kurios viršūnėje įtvirtintas šviesos jutiklis. Automobilis artėja šios arkos link. Jei aukščio skirtumas tarp šviesos jutiklio ir automobilio lempų yra 10 metrų, o jutiklio matuojamas automobilio lempų šviesos spindulių kampas per vieną sekundę pasikeitė iš $\alpha_1 = 45^\circ$ į $\alpha_2 = 60^\circ$, koku greičiu važiuavo automobilis? Atsakymą pateikite metrais per sekundę dviejų skaitmenų po kablelio tikslumu.

3 užduotis

Šviesos jutiklis yra įtvirtintas H metrų aukštyje virš tiesaus, horizontalaus kelio. Juo matuojamas ne po šviesos jutiklio, o kiek toliau esančio objekto greitis. Jutiklio matuojamas objekto šviesos spindulių kampas per vieną sekundę pasikeitė iš α_1 į α_2 . Išveskite formulę, kuria apskaičiuojamas

tokio objekto judėjimo greitis metrais per sekundę (pateikite atsakymą su H , α_1 ir α_2). Laikykite, kad objektas yra kelio aukštyje, objekto aukščio virš kelio nepaisykite.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
<i>I būdas</i> $D = 2 \cdot H = 20 \text{ m.}$	1	Už teisingai apskaičiuotą įžambinės D ilgį, remiantis 30° kampo savybe.
$L = \sqrt{D^2 - H^2} = \sqrt{300} = 10 \cdot \sqrt{3} \text{ m.}$ arba $L = \frac{D}{\cos 30^\circ} = 10 \cdot \sqrt{3} \text{ m.}$	1	Už teisingai apskaičiuotą atstumą L , remiantis Pitagoro teorema arba kampo kosinuso reikšme.
<i>II būdas</i> $\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{L}.$	1	Už teisingai pritaiktą kampo tangento savybę.
$L = \frac{10}{\operatorname{tg} 30^\circ} = 10 \cdot \sqrt{3} \text{ m.}$ Ats.: $10 \cdot \sqrt{3} \text{ (m).}$	1	Už teisingai apskaičiuotą atstumą L , remiantis kampo tangento reikšme.
Pastabos		
1 taškas skiriamas už teisingą pastebėjimą, kaip galima pasinaudoti sinuso, kosinuso arba tangento apibrėžimais. 1 taškas skiriamas už gautą teisingą atsakymą.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Atstumas iki arkos pagrindo, kai kampas $\alpha = 45^\circ$: $L_1 = H = 10 \text{ m.}$ arba $D_1 = \frac{H}{\sin 45^\circ} = 10 \cdot \sqrt{2} \text{ m,}$ $L_1 = \sqrt{(10 \cdot \sqrt{2})^2 - 10^2} = 10 \text{ m.}$	1	Už teisingai apskaičiuotą pirmąjį atstumą L_1 , remiantis stačiojo trikampio su 45° kampu savybe arba kampo sinuso reikšme ir Pitagoro teorema.
Atstumas iki arkos pagrindo, kai kampas $\alpha = 60^\circ$: $D_2 = \frac{H}{\sin 60^\circ} = \frac{20}{3} \cdot \sqrt{3} \text{ m,}$ $L_2 = \sqrt{\left(\frac{20}{3} \cdot \sqrt{3}\right)^2 - 10^2} = \frac{10}{3} \cdot \sqrt{3} \text{ m.}$ arba $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{H}{L_2},$ $L_2 = \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10}{3} \sqrt{3} \text{ m.}$	2	1 taškas – už teisingai apskaičiuotą antrąją įžambinę D_2 , remiantis kampo sinuso reikšme arba taikant kampo tangento savybę. 1 taškas – už teisingai apskaičiuotą atstumą L_2 . Taip pat gali būti sprendžiama, remiantis stačiojo trikampio 30° kampo savybe (1 taškas – už teisingai pritaiktą savybę ir 1 taškas – už teisingai apskaičiuotą L_2 pagal Pitagoro teoremą).
$v = L_1 - L_2 \approx 4,23 \text{ m/s.}$ Ats.: $4,23 \text{ (m/s).}$	1	Už teisingai apskaičiuotą greitį.

Pastabos
<i>Jei paskutinėje dalyje gaunamas neigiamas greitis, tačiau su teisinga absoliučiąja reikšme, taškas už šią dalį vis tiek skiriamas.</i>

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
<i>I būdas</i> Kelio ilgis iki stulpo su jutikliu, kai kampas lygus α : $L = \sqrt{\left(\frac{H}{\sin \alpha}\right)^2 - H^2}.$	1	Už teisingai išvestą formulę atstumui L apskaičiuoti.
$v = \sqrt{\left(\frac{H}{\sin \alpha_1}\right)^2 - H^2} - \sqrt{\left(\frac{H}{\sin \alpha_2}\right)^2 - H^2}.$	1	Už teisingai išvestą formulę greičiui v apskaičiuoti.
<i>II būdas</i> $L = \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha}.$	1	Už teisingai išvestą formulę atstumui L apskaičiuoti.
$v = \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha_1} - \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha_2}.$	1	Už teisingai išvestą formulę greičiui v apskaičiuoti.
Pastabos		
Atsakymas gali būti gautas ir taikant kitą teisingą sprendimo būdą arba kitu pavidalu, pvz.: $v = H \cdot (\operatorname{ctg} \alpha_1 - \operatorname{ctg} \alpha_2).$		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Pritaikykite stačiojo trikampio savybes – įsižiūrėkite į užduoties įvestyje pateiktą figūrą ir įsistatykite žinomus dydžius.

2 užuomina. Prisiminkite stačiojo trikampio su 30° kampu savybę. Kam lygus įžambinės ilgis D , jei sąlygoje nurodyta, kad $H = 10$?

3 užuomina. Jei žinote stačiojo trikampio statinio H ir įžambinės D ilgius, jo pagrindo ilgį L galite apskaičiuoti pagal Pitagoro teoremą.

4 užuomina. Pagal Pitagoro teoremą turite, kad $L^2 + H^2 = D^2$. Taigi į formulę $L = \sqrt{D^2 - H^2}$ įsistatykite jau apskaičiuotą D reikšmę ir sąlygoje pateiktą H reikšmę ir apskaičiuokite atstumą L . Atsakymą pateikite tikslų, t. y. su šaknimis.

2 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite stačiojo trikampio su 45° kampu savybę. Tai padės rasti, koku atstumu nuo stulpo yra automobilis pirmuoju momentu. Pažymėkite gautą atstumą L_1 .

2 užuomina. Pritaikykite 60° kampo sinuso apibrėžimą ir apskaičiuokite įžambinės ilgį. Tada pagal Pitagoro teoremą apskaičiuokite pagrindo ilgį. Galite pritaikyti ir 60° kampo tangento apibrėžimą. Abiem būdais nustatysite automobilio atstumą iki stulpo antruoju momentu. Pažymėkite jį L_2 .

3 užuomina. Kai apskaičiuosite automobilio atstumą iki stulpo abiem momentais, nustatykite, kiek metrų automobilis nuvažiavo nuo vieno momento iki kito. Skaičiuokite greitį. Atkreipkite dėmesį, kad laiko skirtumas tarp šių momentų yra viena sekundė, o greitį reikia pateikti metrais per sekundę. Nepamirškite, kad gautą dydį reikia apskaičiuoti skaičiuotuvu ir suapvalinti antrą skaitmenį po kablelio.

3 užduotis

1 užuomina. Pasinaudokite stačiojo trikampio kampo sinuso arba tangento išraiškomis ir užrašykite, kam lygu L . Atsakymą pateikite kaip dviejų tokių reiškinių skirtumą su skirtingais kampais α_1 ir α_2 .

2 užuomina. Kampo α sinuso reikšmė lygi $\sin \alpha = \frac{H}{D}$, taigi raskite D išraišką. Pritaikykite Pitagoro teoremą dydžiams D ir H , tada turėsite ir L išraišką. Taip pat galite remtis ir kampo α tangento išraiška $\tan \alpha = \frac{H}{L}$, iš kurios rasite L išraišką.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Geometrija ir matavimai	Figūros. Plokščiosios figūros	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Figūros. Įvadas į trigonometriją	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	4
3			Figūros. Įvadas į trigonometriją	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	2

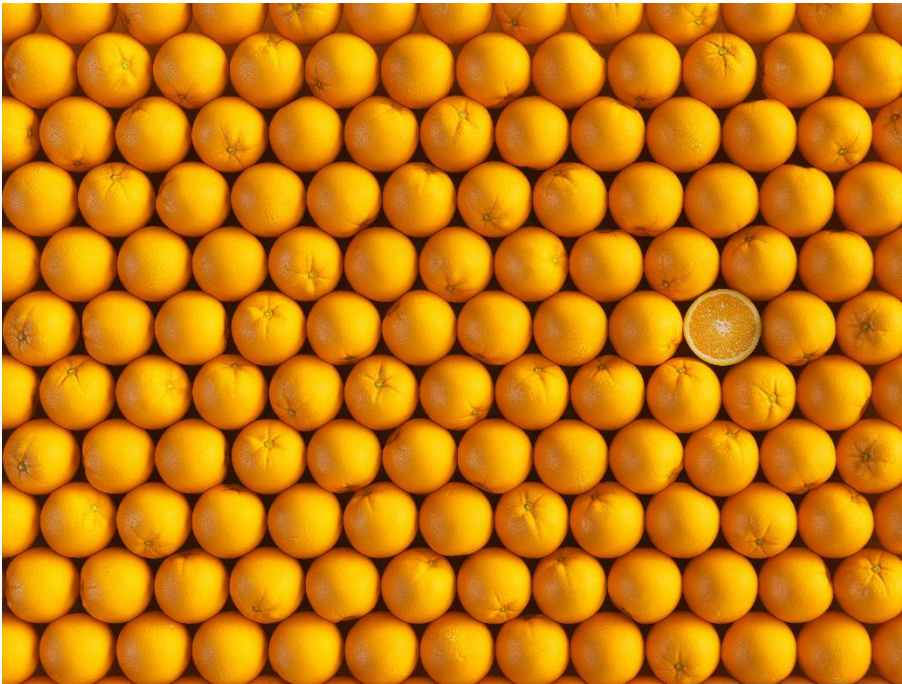
9 (GIMANZIJS I) KLASĖ, GEOMETRIJA IR MATAVIMAI

Skritulių supakavimas

Bendroji įvestis

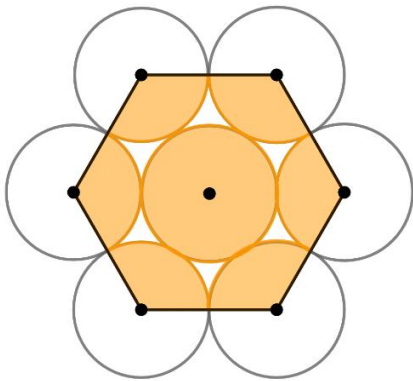
Matematikas Jonas įsidarbino apelsinų krovimo įmonėje. Jis gavo užduotį nustatyti, kaip ant parduotuvės stalo išdėlioti apelsinus, kad jų tilptų kuo daugiau.

Jonas išmatavo stalą ir apelsinus, atliko matematinius skaičiavimus ir nustatė: norint ant šio stalo išdėlioti kuo daugiau apelsinų, juos reikia dėti taip, kad aukštesnės eilės apelsinai patektų į tarpus tarp žemesnės eilės apelsinų.



Šaltinis: Shutterstock, ID: 506830525.

Naudodamas šį dėliojimo būdą, Jonas pastebėjo – jeigu apelsinai yra vienodo dydžio ir išdėliojami taisyklingai, tuomet jų centrai sudaro taisyklinguosius šešiakampius.



Užduotys

1 užduotis

Išnagrinėkite vieną tokį taisyklingąjį šešiakampį (kaip pavaizduota paveiksle pirmiau). Šešiakampio centre yra vienas pilnas skritulys. Aplink jį išsidėsčiusios šešios skritulio išpjovos. Kiekviena iš šių išpjovų atitinka trečdalį skritulio ploto.



Kiek pilnų skritulių galima sudėti iš šešių tokių išpjovų?

Kiek iš viso pilnų skritulių galima sudėti iš šešiakampio viduje esančių nuspaltvintų figūrų (vieno pilno skritulio ir šešių išpjovų)?

2 užduotis

Skritulių spinduliai yra lygūs 2 cm. Kokią dalį šešiakampio ploto sudaro jo viduje nuspaltvintų figūrų plotų suma? Atsakymą pateikite su skaičiumi π .

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Iš 6 išpjovų galima sudėti 2 pilnus skritulius.	1	Už teisingą atsakymą.
Iš 6 išpjovų ir 1 skritulio galima sudėti 3 pilnus skritulius.	1	Už teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
$S_{\text{skritulio}} = \pi \cdot r^2 = 4\pi \text{ cm}^2.$	1	Už teisingai apskaičiuotą vieno skritulio plotą.
$S_{\text{šešiakampio}} = 6 \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2.$	2	1 taškas – už teisingai pritaiktą lygiakraščio trikampio ploto formulę arba už teisingai apskaičiuotą jo aukštinę ($h = 2\sqrt{3} \text{ cm}$). 1 taškas – už teisingai apskaičiuotą šešiakampio plotą.
$\frac{3 \cdot S_{\text{skritulio}}}{S_{\text{šešiakampio}}} = \frac{12\pi}{24\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ (arba $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$).	1	Už teisingai apskaičiuotą plotų santykį, t. y. gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Jei užduotis sprendžiama nagrinėjant ne šešiakampį, o vieną iš šešių jo sudedamųjų trikampių, taškai taip pat skiriami.		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Kiekviena skritulio išpjova atitinka trečdalį skritulio. Taigi iš trijų tokių išpjovų išeina vienas pilnas skritulys. Ką gausite, jei sudėsite šešias išpjovas?

2 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad skritulio centre yra vienas pilnas skritulys. Todėl prie anksčiau gauto atsakymo pridėkite dar vieną skritulį.

2 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite, kam lygus vieno skritulio plotas. Kiek tokių skritulių iš viso yra nagrinėjamoje figūroje?

2 užuomina. Jei skritulio spindulys lygus 2 cm, kam lygi šešiakampio kraštinė? Apskaičiuokite taisyklingojo šešiakampio plotą. Galima pasinaudoti lygiakraščio trikampio ploto formule – šešiakampis susideda iš šešių tokių lygiakraščių trikampių.

3 užuomina. Apskaičiuokite nuspalvintų skritulio dalių ploto ir šešiakampio ploto santykį.

Metaduomenys

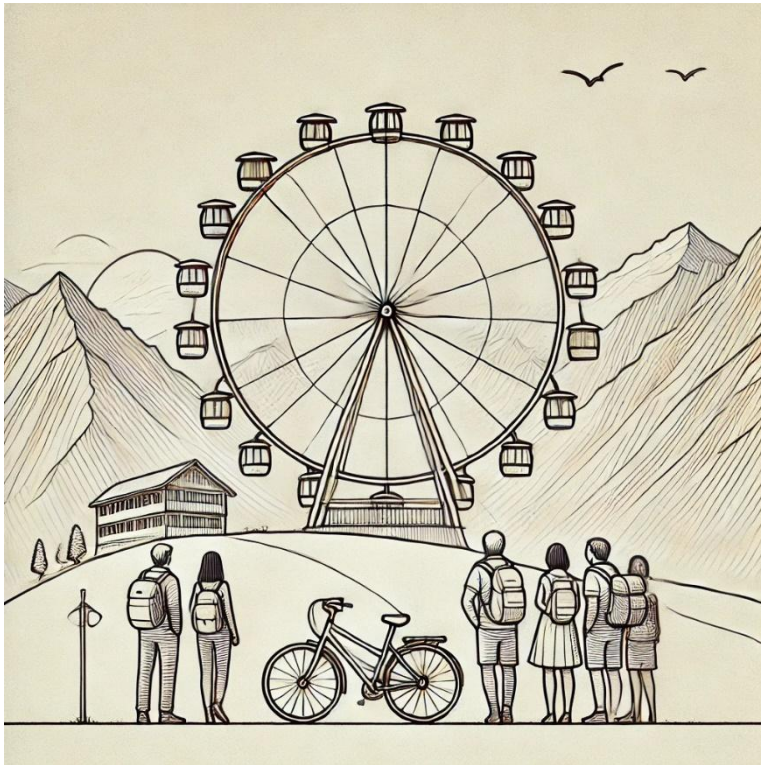
Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Geometrija ir matavimai	Figūros	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Figūros	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	4

Dviratininkas kalnuose

Bendroji įvestis

Matematikos entuziastai Eglė ir Tomas dviračiais keliauja po kalnuotas vietas, pakeliui stebi aplinką ir svarsto, kaip pritaikyti turimas matematines žinias.

Atlikite užduotis, susijusias su geometrijos taikymu gyvenimiškose situacijose.



(Paveikslas sugeneruotas su dirbtiniu intelektu)

Užduotys

1 užduotis

Dviratininkai Eglė ir Tomas atvyko į miestelį, kuriame yra apžvalgos ratas. Šio rato spindulys lygus 12 metrų. Ratas sukasi pastoviu greičiu ir visiškai apsisuka per 80 sekundžių.

Koks šio rato apskritimo ilgis? Atsakymą pateikite trijų reikšminių skaitmenų tikslumu (naudokite $\pi = 3,14$).

Per kiek sekundžių kabina, kuri yra žemiausiame taške, pasieks aukščiausią apžvalgos rato tašką?

2 užduotis

Aplankę miestą A, kuris yra 60 metrų virš jūros lygio, dviratininkai Eglė ir Tomas nusprendė važiuoti į miestą B. Miestas B yra 180 metrų virš jūros lygio. Kelias tarp šių taškų yra tiesus ir su horizontu sudaro 20° kampą.

Laikykite, kad $\sin 20^\circ = 0,342$ ir apskaičiuokite $\cos 20^\circ$. Atsakymą pateikite keturių reikšminių skaitmenų tikslumu.

Kokio ilgio yra kelias tarp taškų A ir B? Atsakymą pateikite keturių reikšminių skaitmenų tikslumu.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Apskritimo ilgis apskaičiuojamas pagal formulę: $C = 2 \cdot \pi \cdot r$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Pritaikome formulę ir gauname, kad apskritimo ilgis yra: $C = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3,14 \cdot 12 \approx 75,4 \text{ m.}$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Kadangi kabina pasiekia aukščiausią tašką apsukusi pusę rato, tai: $t = 80 : 2 = 40 \text{ s.}$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
Kadangi $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, gauname $0,342^2 + \cos^2 20^\circ = 1$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Iš čia apskaičiuojame $\cos 20^\circ$: $\cos^2 20^\circ = 1 - 0,117$; $\cos 20^\circ = \sqrt{0,883} \approx 0,940$.	1	Už gautą teisingą atsakymą ($\cos 20^\circ$ apskaičiavimą).
Apskaičiuojame miestų aukščių virš jūros lygio skirtumą: $180 - 60 = 120 \text{ m.}$	1	Už teisingai apskaičiuotą miestų aukščių virš jūros lygio skirtumą.
Kelias tarp taškų A ir B stačiajame trikampyje sudaro įžambinę, todėl: $\sin 20^\circ = \frac{120}{AB}$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą taikyti kampo sinuso apibrėžimą.
Apskaičiuojame AB ilgį: $AB = \frac{120}{0,342} \approx 350,9 \text{ m.}$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Pagalvokite, kokia yra apskritimo ilgio formulė. Įsistatykite į ją apžvalgos rato spindulio dydį ir apskaičiuokite apskritimo ilgį.

2 užuomina. Jei kabina apsuka visą ratą per 80 sekundžių, per kiek laiko ji pasiekia aukščiausią tašką, t. y. apsuka pusę rato?

2 užduotis

1 užuomina. Pritaikykite kampo sinuso ir kosinuso kvadratų sumos taisyklę: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Įsistatykite į ją žinomą reikšmę $\sin 20^\circ = 0,342$. Iš gautos lygties apskaičiuokite $\cos 20^\circ$ reikšmę.

2 užuomina. Kad apskaičiuotumėte atstumą tarp taškų A ir B, pažymėkite šiuos taškus brėžinyje ir juos sujunkite, papildykite brėžinį tašku C taip, kad AB būtų stačiojo trikampio ABC įžambinė, o taškas C būtų po tašku B. Kai apskaičiuosite taškų A ir B aukščių virš jūros lygio skirtumą, gausite šio stačiojo trikampio aukštinės BC ilgį. Pritaikykite stačiojo trikampio kampo sinuso apibrėžimą ir pagal jį apskaičiuokite atstumą tarp taškų A ir B. Panaudokite sąlygoje duotą reikšmę $\sin 20^\circ = 0,342$.

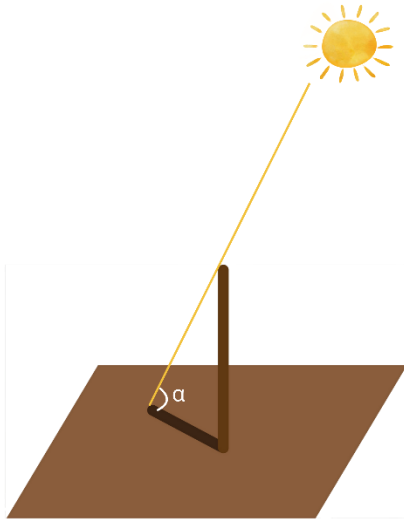
Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Geometrija ir matavimai	Figūros	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	3
2			Figūros	Loginis mąstymas ir įrodymai	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	5

Šešėlio ilgis

Bendroji įvestis

Mokyklos kieme, lygioje horizontalioje aikštelėje, stovi 8 metrų aukščio vėliavos stiebas. Devintos klasės mokiniai gavo užduotį patyrinti, kaip skirtingu paros metu ir skirtingais metų laikais keičiasi saulės šviesos spindulių kritimo kampas (α) ir stiebo šešėlio ilgis.



Matavimai kelis kartus per dieną (8:00, 10:00, 12:00, 14:00) buvo atliekami dvi dienas – birželio 1 d. (vasarą) ir rugsėjo 15 d. (rudenį).

Mokiniai gavo šiuos rezultatus:

Laikas	Šešėlio ilgis (m) birželio 1 d.	Šešėlio ilgis (m) rugsėjo 15 d.
8:00	16,0	20,0
10:00	9,0	13,0
12:00	5,0	8,0
14:00	6,5	9,5

Užduotys

1 užduotis

Kuriuo metu birželio 1 d. šešėlio ilgis buvo du kartus didesnis nei stiebo aukštis?

2 užduotis

Kiek laipsnių skyrėsi saulės šviesos kritimo kampas birželio 1 d. ir rugsėjo 15 d. 12:00 val.?

Atsakymą suapvalinkite iki sveikąjį skaičių. Saulės šviesos kritimo kampas – kampas tarp žemės paviršiaus ir saulės spindulio.

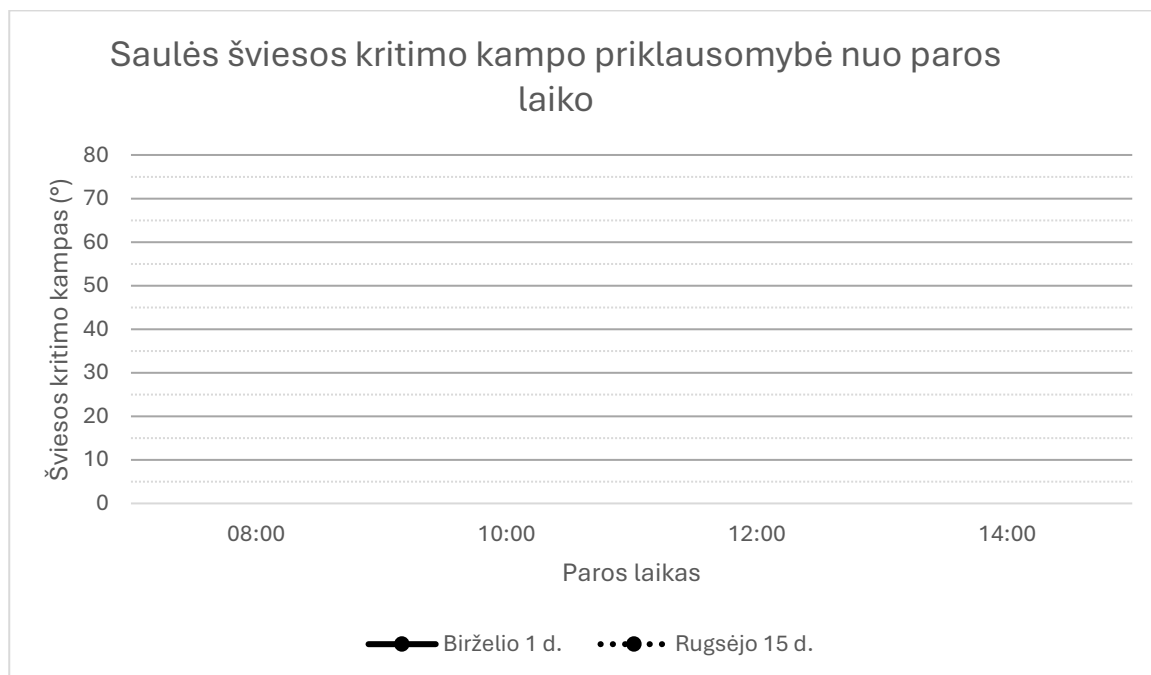
3 užduotis

Kiek laipsnių pasikeitė (padidėjo ar sumažėjo) saulės šviesos kritimo kampas birželio 1 d. nuo 8:00 iki 10:00 val.? Atsakymą suapvalinkite iki sveikojo skaičiaus.

4 užduotis

Pasinaudokite įvestyje pateiktais matavimų duomenimis ir nubraižykite linijinę diagramą, kurioje parodytumėte saulės šviesos kritimo kampus (α) birželio 1 d. ir rugsėjo 15 d. skirtingais laikais (8:00, 10:00, 12:00, 14:00).

Pažymėkite šių kampų taškus, juos sujunkite linijomis, kad gautumėte abi dienas atitinkančias kreives, ir nustatykite, kuriuo paros metu skirtumas tarp saulės šviesos kritimo kampų yra didžiausias. Koks jis? Atsakymą suapvalinkite iki sveikojo skaičiaus.



Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
Peržiūrime sąlygoje pateiktus duomenis ir nustatome, kad birželio 1 d. šešėlio ilgis dukart ilgesnis už stiebą 8:00 val. Ats.: 8 valandą.	1	Už teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Stiebo aukštis $H = 8$ m. Saulės šviesos kritimo kampas α susijęs su šešėlio ilgiu L taip: $tg(\alpha) = \frac{H}{L} = \frac{8}{L}$. Birželio 1 d. 12:00 val.: $L = 5,0 \text{ m} \Rightarrow tg(\alpha) = \frac{8}{5} = 1,6$ $\alpha = \arctg(1,6) \approx 58,0^\circ$	1	Už teisingai apskaičiuotą kampą birželio 1 dieną.
Rugsėjo 15 d. 12:00 val.: $L = 8,0 \text{ m} \Rightarrow tg(\alpha) = \frac{8}{8} = 1$ $\alpha = \arctg(1) = 45,0^\circ$	1	Už teisingai apskaičiuotą kampą rugsėjo 15 dieną.
Apskaičiuojame skirtumą: $58^\circ - 45^\circ = 13^\circ$ Ats.: 13° skirtumas.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Stiebo aukštis $H = 8$ m. Saulės šviesos kritimo kampas α susijęs su šešėlio ilgiu L taip: $tg(\alpha) = \frac{H}{L} = \frac{8}{L}$. Birželio 1 d. 8:00 val.: $L = 16,0 \text{ m} \Rightarrow tg(\alpha) = \frac{8}{16} = 0,5$ $\alpha = \arctg(0,5) \approx 26,6^\circ$	1	Už teisingai apskaičiuotą kampą 8:00 val.
Birželio 1 d. 10:00 val.: $L = 9,0 \text{ m} \Rightarrow tg(\alpha) = \frac{8}{9} \approx 0,8889$ $\alpha = \arctg(0,8889) \approx 41,8^\circ$	1	Už teisingai apskaičiuotą kampą 10:00 val.
Apskaičiuojame skirtumą $41,8^\circ - 26,6^\circ = 15,2^\circ \approx 15^\circ$ Ats.: saulės šviesos kritimo kampas padidėjo maždaug 15° .	1	Už gautą teisingą atsakymą.

4 užduoties vertinimas																	
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas															
	3																
Stulpo aukštis $H = 8$ m. Šviesos kritimo kampas α susijęs su šešėlio ilgiu L taip: $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{H}{L} = \frac{8}{L}.$ Pagal formulę apskaičiuojame saulės šviesos kritimo kampus: <table border="1"> <thead> <tr> <th>Laikas</th><th>Kampas (α) birželio 1 d.</th><th>Kampas (α) rugsėjo 15 d.</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>8:00</td><td>26,6°</td><td>21,8°</td></tr> <tr> <td>10:00</td><td>41,8°</td><td>31,7°</td></tr> <tr> <td>12:00</td><td>58,0°</td><td>45,0°</td></tr> <tr> <td>14:00</td><td>50,3°</td><td>40,0°</td></tr> </tbody> </table>	Laikas	Kampas (α) birželio 1 d.	Kampas (α) rugsėjo 15 d.	8:00	26,6°	21,8°	10:00	41,8°	31,7°	12:00	58,0°	45,0°	14:00	50,3°	40,0°	1	Už bent 4 teisingai apskaičiuotus kampus.
Laikas	Kampas (α) birželio 1 d.	Kampas (α) rugsėjo 15 d.															
8:00	26,6°	21,8°															
10:00	41,8°	31,7°															
12:00	58,0°	45,0°															
14:00	50,3°	40,0°															
Pažymime grafiškai apskaičiuotus duomenis: Saulės šviesos kritimo kampo priklausomybė nuo paros laiko Šviesos kritimo kampas (°) Paros laikas —●— Birželio 1 d. ...●... Rugsėjo 15 d.	1	Už teisingai pavaizduotus duomenis.															
Iš diagramos matome, kad didžiausias skirtumas buvo 12:00 val., apskaičiuojame jį: $58,0^{\circ} - 45,0^{\circ} = 13,0^{\circ}$ Ats.: didžiausias skirtumas 12:00 val. – 13,0°.	1	Už teisingai apskaičiuotą skirtumą.															

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Įsiskaitykite į sąlygą ir atkreipkite dėmesį, kad stiebo aukštis yra 8 metrai.

2 užuomina. Palyginkite lentelėje pateiktus birželio 1 d. duomenis su 8 metrais.

2 užduotis

1 užuomina. Naudokite formulę $tg(\alpha) = \frac{8}{L}$, kur L – šešėlio ilgis.

2 užuomina. Apskaičiuokite spindulių kritimo kampą birželio 1 d. 12:00 val. ir rugsėjo 15 d. 12:00 val.

3 užuomina. Raskite šių dviejų kampų skirtumą.

3 užduotis

1 užuomina. Įsižiūrėkite į lentelę ir nustatykite, kokio ilgio šešėlis buvo birželio 1 d. 8:00 ir 10:00 val.

2 užuomina. Naudokite formulę $tg(\alpha) = \frac{8}{L}$, kur L – šešėlio ilgis.

3 užuomina. Raskite kampų skirtumą ir suapvalinkite iki sveikąjį skaičių.

4 užduotis

1 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad grafike x ašis rodo laiką (valandas), o y ašis – saulės šviesos kritimo kampą (laipsniais).

2 užuomina. Pasinaudokite formulę $tg(\alpha) = \frac{8}{L}$, kur L – šešėlio ilgis, ir apskaičiuokite kiekvieną kampą.

3 užuomina. Atskirai pažymėkite birželio 1 d. ir rugsėjo 15 d. taškus – galite žymėti skirtingomis spalvomis ar simboliais.

4 užuomina. Palyginkite vertikalius atstumus tarp kreivių – didžiausias skirtumas rodo laiką, kada saulės šviesos kritimo kampų skirtumas buvo didžiausias.

Metaduomenys

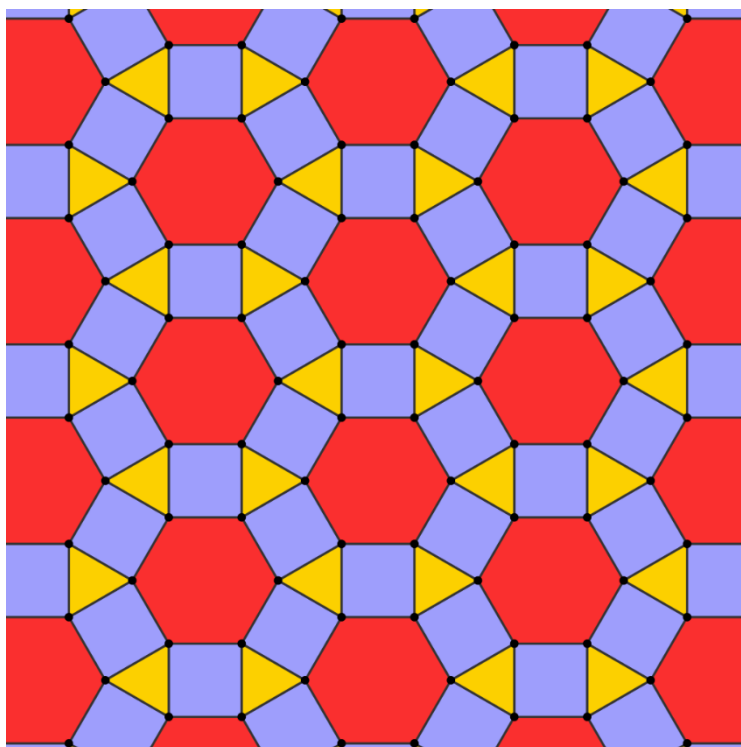
Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Geometrija ir matavimai	Įvadas į trigonometriją	Matematinis problemų sprendimas	Matematinis komunikavimas (B)	AMG	Slenkstinis	1
2			Įvadas į trigonometriją	Matematinis problemų sprendimas	Matematinis komunikavimas (B)	AMG	Pagrindinis	3
3			Įvadas į trigonometriją	Matematinis problemų sprendimas	Matematinis komunikavimas (B)	AMG	Pagrindinis	3
4			Įvadas į trigonometriją	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas (B)	AMG	Aukštesnysis	3

Plytelių mozaikos geometrija

Bendroji įvestis

Ar kada pastebėjote, kaip gražiai atrodo grindiniams ir sienoms dekoruoti naudojami iš geometrinių figūrų sudaryti raštai? Panagrinėkime ir mes iš taisyklingųjų **trikampių**, **kvadratų** ir **šešiakampių**, kurių visų kraštinių ilgiai vienodi, sukurtą raštą.

Analizuojant tokius raštus, vartojama sąvoka **mazgas** – tai taškas, kuriame susitinka kelių plytelių kampai. Mūsų rašto kiekviename mazge susitinka trikampio, dviejų kvadratų ir šešiakampio kampai.



Šaltinis: wikipedia.org

Užduotys

1 užduotis

Kokia viename mazge susitinkančių figūrų kampų, kurių viršūnės yra tame taške, didumų suma?

2 užduotis

Kiek kartų taisyklingojo trikampio plotas mažesnis už taisyklingojo šešiakampio plotą, jei jų kraštinės yra vienodo ilgio?

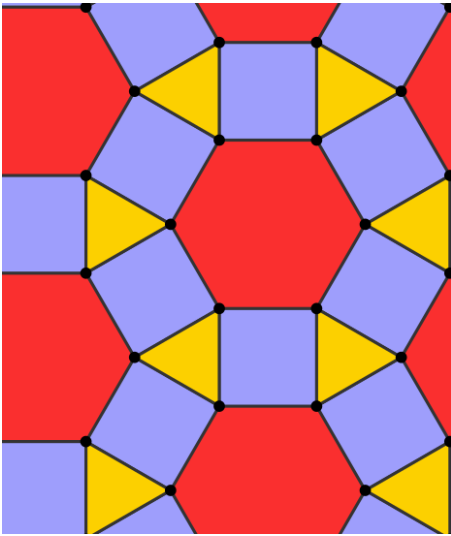
- A. 2 kartus
- B. 3 kartus

- C. 4 kartus
- D. 6 kartus

3 užduotis

Toliau pateiktame paveiksle parodytas stačiakampio formos mozaikos fragmentas (blokas), kurį sudaro 4 pilnų šešiakampių dalys, 12 pilnų kvadratų dalys ir 8 trikampiai.

Kokį šio mozaikos fragmento paviršiaus ploto procentą sudaro šešiakampės figūros? Atsakymą suapvalinkite iki dešimtųjų.



Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	1	
Ats.: 360°	1	Už teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	1	
Ats.: D. 6 kartus	1	Už teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Plotų santykiai žinomi: Kai visų plytelių kraštinių ilgių vienodi, trikampio plotą galime laikyti pagrindiniu dydžiu T. Tada: • Trikampio plotas = T • Kvadrato plotas = $\frac{4}{\sqrt{3}}T$ • Šešiakampio plotas = $6T$ Skačiuojame visą bloko plotą: • 4 pilni šešiakampiai $\rightarrow 4 \cdot 6T = 24T$, • 12 pilnų kvadratų $\rightarrow 12 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}T = 16\sqrt{3}T$, • 8 trikampiai $\rightarrow 8T$. Bendras plotas: $S = 24T + 16\sqrt{3}T + 8T \approx 59,7128T$.	1	Už teisingą apskaičiavimą, kiek ploto vienetų sudaro skirtingos figūros.
Apskačiuojame, kokią dalį bendro ploto sudaro 4 šešiakampiai: $\frac{24T}{59,7128T} \cdot 100 \% \approx 0,402 \cdot 100 \% \approx 40,2 \%$ Ats.: šešiakampės figūros sudaro apie 40,2 % viso mozaikos fragmento paviršiaus ploto.	1	Už teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Pagalvokite, kokie kampai yra lygiakraščiame trikampyje, kvadrato ir šešiakampyje – jų didumai nuo rašto nepriklauso.

2 užuomina. Mazge susitinkančių figūrų kampai turi būti nepersidengę ir be tarpų. Kokią geometrijos taisyklę tai turi atitikti?

2 užduotis

1 užuomina. Kiek vienodų trikampių galima sudėti nuo šešiakampio centro link viršūnių – panašiai kaip žiedlapius?

2 užuomina. Formulė lygiakraščio trikampio plotui apskaičiuoti yra $S_T = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, kur a yra trikampio kraštinės ilgis?

3 užuomina. Formulė taisyklingojo šešiakampio plotui apskaičiuoti yra $S_T = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$, kur a yra šešiakampio kraštinės ilgis?

3 užduotis

1 užuomina. Pagalvokite, kokių santykiu pagal plotą susiję trikampis, kvadratas ir šešiakampis, kai jų kraštinės vienodos.

2 užuomina. Koks bus bendras fragmento plotas ir kiek procentų jo sudaro šešiakampių plotas?

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Geometrija ir matavimai	Figūros	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Slenkstinis	1
2			Figūros	Matematinis problemų sprendimas	Probleminis samprotavimas	AMG	Patenkinamas	1
3			Figūros	Matematinis problemų sprendimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Pagrindinis	2

Tiltas per upę

Bendroji įvestis

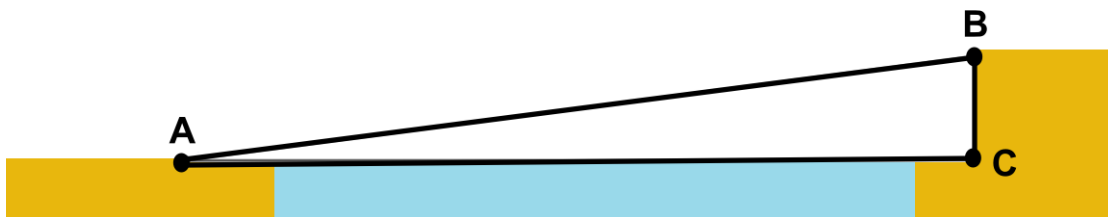
Inžinierė Morta gavo užsakymą statyti tiltą per upę. Kad eismas būtų saugus ir patogus, tilto nuolydis turi atitikti numatytus standartus.

Lietuvos statybos techninių reikalavimų reglamente STR 2.06.02:2001 „Tiltai ir tuneliai. Bendrieji reikalavimai“ nurodoma, kad maksimalus leistinas tiltų nuolydis yra 4 %.

Tilto nuolydis – tai tilto aukščio pokyčio ir horizontalaus atstumo nuo tilto pradžios iki pabaigos taško santykis. Jis matuojamas procentais ir apskaičiuojamas pagal formulę:

$$\text{nuolydis} = \frac{\text{aukščio pokytis}}{\text{horizontalus atstumas}} \cdot 100 \%$$

Pavyzdžiui, pateiktame brėžinyje AB atitinka tiltą, AC atitinka horizontalų atstumą nuo tilto pradžios iki pabaigos taško po tiltu, o BC – aukščio pokytį tilto galuose.



Užduotys

1 užduotis

Koks gali būti didžiausias tilto pradžios ir pabaigos taškų aukščio skirtumas (brėžinyje atkarpa BC), kad atitiktų numatyto standarto reikalavimus, jeigu horizontalus atstumas nuo tilto pradžios iki pabaigos AC=200m? Gautą atsakymą pateikite metrais.

2 užduotis

Svarstoma tiltą statyti kitoje vietoje, kur visas jo ilgis būtų 150 metrų, o numatomas aukščio skirtumas – 7,5 metro. Ar toks tiltas atitiktų reglamento STR 2.06.02:2001 nuolydžio reikalavimus?

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Didžiausio leistino 4% nuolydžio atveju turime: $4\% = \frac{\text{aukščio pokytis}}{\text{horizontalus atstumas}} \cdot 100 \%,$ arba $\text{aukščio pokytis} = 0,04 \cdot \text{horizontalus atstumas}.$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Naudojant didžiausią galimą nuolydžio reikšmę ir pateiktą horizontalų atstumą gauname: $\text{aukščio pokytis} = 0,04 \cdot 200 = 8 \text{ m.}$ Ats.: 8 metrai.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Jei tilto ilgis 150 metrų, o aukščių skirtumas 7,5 metro, tuomet nuolydis apskaičiuojamas taip: $\frac{BC}{AB} \cdot 100\% = \frac{7,5}{150} \cdot 100\%.$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą ir užrašytą nuolydžio apskaičiavimo reiškinį.
Gauname, kad nuolydis lygus: $\frac{7,5}{150} \cdot 100\% = 5\%.$	1	Už teisingai apskaičiuotą nuolydžio reikšmę.
Kadangi $5\% > 4\%$, tokio tilto nuolydis neatitinka standarto reikalavimų. Ats: ne, neatitinka.	1	Už padarytą teisingą išvadą ir jos pagrindimą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Pagal nuolydžio apibrėžimą užrašykite, kam lygus didžiausias leistinas nuolydis. Pagal gautą išraišką apskaičiuokite, kam lygus didžiausias leistinas aukščių skirtumas, kai yra žinomas horizontalus atstumas tarp tilto pradžios ir pabaigos.

2 užuomina. Išreikškite didžiausią nuolydžio reikšmę per aukščių skirtumą ir horizontalų atstumą tarp tilto pradžios ir pabaigos. Suprastinkite gautą reiškinį ir apskaičiuokite didžiausią galimą aukščių skirtumą.

2 užduotis

1 užuomina. Pagal nuolydžio apibrėžimą apskaičiuokite, kam lygus nuolydis duotam tiltui. .

2 užuomina. Apskaičiavę tilto nuolydį palyginkite jį su didžiausiu leistinu tilto nuolydžiu ir padarykite išvadą.

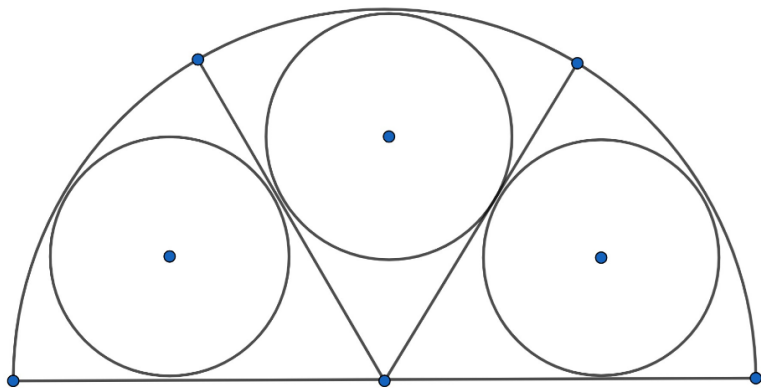
Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Geometrija ir matavimai	Figūros	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Figūros	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	3

Vitražas

Bendroji įvestis

Senovinėje katedroje meistrai ruošiasi atkurti unikalų vitražą, kuris yra pusę skritulio sudarančios arkos formos. Šios arkos skersmuo yra 3 metrai. Be to, ji padalyta į tris lygius segmentus, o kiekviename jų yra įbrėžtas apskritimas:



Užduotys

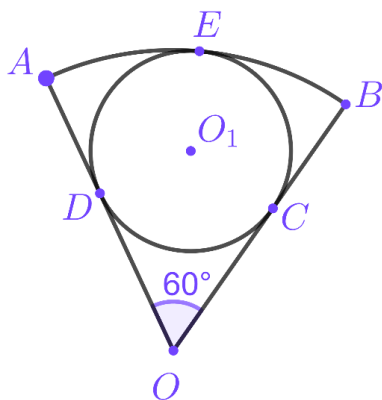
1 užduotis

Apskaičiuokite, kam lygus brėžinyje pavaizduotos arkos plotas.

Kam lygus vieno iš trijų arkos segmentų plotas?

2 užduotis

Sakykime, kad į segmentą įbrėžto apskritimo centras O_1 priklauso kampo AOB pusiaukampinei. Kokio spindulio turi būti įbrėžtas apskritimas, kad tilptų į brėžinyje pavaizduotą segmentą (liestų visas tris segmento kraštines)?



Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Pusės skritulio formos arkos plotas lygus pusei skritulio ploto su spinduliu $R = \frac{3}{2}$: $S = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{9}{8}\pi.$ Ats.: $\frac{9}{8}\pi$.	1	Už teisingai apskaičiuotą arkos plotą.
Vieno segmento plotas lygus trečdaliui arkos ploto (arba šeštadaliui skritulio ploto): $S = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{3}{8}\pi.$ Ats.: $\frac{3}{8}\pi$.	1	Už teisingai apskaičiuotą vieno segmento plotą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Į segmentą įbrėžto apskritimo spindulį pasižymime r. Ant kampo AOB pusiaukampinės pažymėkime taškus O_1 (įbrėžto apskritimo centras) ir E (įbrėžto apskritimo ir arkos išlenktos kraštinės susikirtimo taškas). Kadangi $OE = 3/2$ ir $O_1E = r$, gauname, kad $OO_1 = \frac{3}{2} - r$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą atkarpą OO_1 išreikšti per spindulį r .
Tada trikampio OO_1C kampo $\angle O_1OC$ didumas yra 30°. arba Tada trikampio OO_1D kampo $\angle O_1OD$ didumas yra 30°.	1	Už teisingai apskaičiuotą kampo $\angle O_1OC$ arba $\angle O_1OD$ didumą.
Remiamės 30° kampo sinuso apibrėžimu ir gauname lygtį įbrėžto apskritimo spinduliui apskaičiuoti: $\sin 30^\circ = \frac{O_1C}{O_1O},$ arba $\frac{1}{2} = \frac{r}{\frac{3}{2} - r}.$	1	Už sudarytą teisingą lygtį spinduliui r apskaičiuoti.
Pertvarkome ir išsprendžiame lygtį. Gauname: $r = 0,5$. Ats.: 0,5 metro.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite skritulio ploto formulę $S = \pi \cdot R^2$. Kam lygus spindulys R ? Nustatykite jį pagal duotą arkos skersmenį.

2 užuomina. Apskaičiuokite viso skritulio plotą, o tada nustatykite, kokią dalį skritulio sudaro arka. Kokią dalį sudaro vienas arkos segmentas?

2 užduotis

1 užuomina. Vieno segmento brėžinį papildykite arkos centrinio kampo pusiaukampine. Atkreipkite dėmesį, kad įbrėžto apskritimo centras priklauso šiai pusiaukampinei. Apskaičiuokite, į kokio dydžio kampus buvo padalytas centrinis kampas.

2 užuomina. Jei arkos spindulys lygus $3/2$, o įbrėžto apskritimo spindulys r , tuomet kaip galite per šiuos dydžius išreikšti atstumą nuo arkos centro iki įbrėžto apskritimo centro? Nagrinėkite centrinio 60° kampo pusiaukampinę ir ant jos esančius taškus.

3 užuomina. Pritaikykite stačiojo trikampio kampo sinuso savybę. Išreikškite $\sin 30^\circ$ per įbrėžto apskritimo spindulį. Pasinaudokite tuo, kad $\sin 30^\circ = 1/2$, ir išspręskite gautą lygtį.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Geometrija ir matavimai	Figūros	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Figūros	Loginis mąstymas ir įrodymai	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	4

Saugus naudojimasis kopėčiomis

Bendroji įvestis

Dauguma institucijų ir įmonių turi pasitvirtinusias įvairias saugos ir sveikatos instrukcijas, kurių privalo laikytis visi darbuotojai. Viena jų „Darbuotojo saugos ir sveikatos instrukcija dirbant aukštyje“ svarbi, kai dirbama naudojant kopėčias ar pastolius.

Ištrauka iš šios instrukcijos:

20. Dirbti stovint ant kopėčių ar lipynių galima užlipus ne aukščiau kaip 1 m iki jų viršaus (vertikalus aukščių skirtumas tarp stovėjimo taško ir aukščiausio kopėčių taško turi būti ne mažesnis kaip 1 m).

21. Kopėčias reikia statyti ne didesniu kaip 75° kampu horizontalaus paviršiaus atžvilgiu.

Užduotys

1 užduotis

Kopėčios, kurių ilgis 4 metrai, pastatytos taip, kad jų pagrindas nuo sienos yra nutolęs per 1 metrą. Ar kopėčios pastatytos laikantis saugos reikalavimų, nurodytų instrukcijos 21 punkte?

2 užduotis

Įmonė nori įsigyti naujas kopėčias, tinkamas darbui, stovint 4,5 metro aukštyje. Koks turi būti minimalus kopėčių ilgis, kad jos atitiktų saugos instrukcijos reikalavimus? Atsakymą metrais suapvalinkite iki šimtųjų.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Nubraižome statųjį trikampį, kurio įžambinė yra kopėčios, o vienas statinis – atstumas nuo sienos iki kopėčių pagrindo. $\cos(\alpha) = \frac{\text{statinis}}{\text{įžambinė}} = \frac{1}{4} = 0,25$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Skaiciuotuvu apskaičiuojame, kad: $\alpha \approx 75,52^\circ$ Taigi kopėčios pastatytos šiek tiek per statmenai. Saugumo reikalavimai netenkinami.	1	Už padarytą teisingą išvadą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Nubraižome statųjį trikampį, kurio įžambinė yra kopėčios, o vienas iš statinių – atstumas nuo žemės iki taško, kuriame norima dirbti, + 1. Norint dirbti 4,5 metro aukštyje ir laikytis 20 punkto reikalavimų, minimalus aukštis, kurį turi pasiekti kopėčios, yra: $4,5 + 1 = 5,5 \text{ metro.}$	1	Už teisingai apskaičiuotą statinį.
Apskaičiuojame minimalų kopėčių ilgį, kai jos statomos 75° kampu: $l = \frac{5,5}{\sin 75^\circ} \approx \frac{5,5}{0,9659} \approx 5,69 \text{ metro.}$ Ats.: kopėčių ilgis turi būti bent 5,69 metro.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą ir gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Nubrėžkite statųjį trikampį, kurio įžambinė – į sieną atremtos kopėčios. Kokius duomenis jau žinote iš sąlygos ir galite įrašyti į brėžinį?

2 užuomina. Prisiminkite, kaip skaičiuojami kampai, taikant trigonometrines funkcijas. Remkitės kampo, kurį sudaro kopėčios ir žemės paviršius, kosinuso savybe ir sudarykite lygtį. Skaičiuotuvu apskaičiuokite kampo dydį ir palyginkite jį su rekomendacijose nurodytu kampo dydžiu.

2 užduotis

1 užuomina. Nubrėžkite brėžinį. Kokius duomenis jau žinote iš sąlygos ir galite įrašyti į brėžinį? Atkreipkite dėmesį į 20 punkte nurodytą 1 m saugumo reikalavimą.

2 užuomina. Prisiminkite, kaip skaičiuojami kampai, taikant trigonometrines funkcijas. Remkitės kampo, kurį sudaro kopėčios ir žemės paviršius, sinuso savybe ir apskaičiuokite minimalų kopėčių ilgį.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Geometrija ir matavimai	Figūros	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	2
2			Figūros	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	2

9 (GIMANZIJS I) KLASĖ, DUOMENYS IR TIKIMYBĖS

Matematinio modeliavimo pavyzdys

Bendroji įvestis

Tiriant įvairius reiškinius – tiek gamtos mokslų, tiek ekonomikos ar inžinerijos srityse – dažnai susiduriama su situacija, kai vienas dydis vienareikšmiškai priklauso nuo kito. Tokias priklausomybes dažnai galima aprašyti matematiniais modeliais, kurie padeda daryti prognozes ir priimti sprendimus.

Toliau pateikti duomenys atspindi dviejų kintamųjų tarpusavio ryšį.

x	y
2	7
4	16
6	24
8	40
10	55

Užduotys

1 užduotis

Sakykime, šių kintamųjų tarpusavio ryšys bandomas modeliuoti tiesiniu sąryšiu $y = 4x$. Nustatykite, kurie lentelėje pateikti taškai (x, y) tenkina lygtį $y = 4x$.

2 užduotis

Sakykime, šių kintamųjų tarpusavio ryšys bandomas modeliuoti tiesiniu sąryšiu $y = 5x$. Susitarkime, kad pagal šį sąryšį iš x gaunamą y reikšmę vadinsime prognozuojama y reikšme.

Nustatykite, su kuria iš lentelėje pateiktų x reikšmių prognozuojama y reikšmė labiausiai skiriasi nuo lentelėje pateiktos y reikšmės. Taip pat nustatykite, su kuria x reikšme šis skirtumas yra lygus nuliui.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Lygtį $y = 4x$ tenkina $(x, y) = (4, 16)$, nes $16 = 4 \cdot 4$.	1	Už nustatytą teisingą tašką.
Lygtį $y = 4x$ tenkina $(x, y) = (6, 24)$, nes $24 = 4 \cdot 6$.	1	Už nustatytą teisingą tašką.
Pastabos		
Taškai taip pat skiriami, jei nurodomos tik x reikšmės.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Su reikšme $x = 8$ šis skirtumas lygus nuliui, nes prognozuojama reikšmė lygi 40, o lentelėje pateikta reikšmė irgi lygi 40.	1	Už teisingą nustatymą, su kuria x reikšme gaunamas minimalus skirtumas.
Su reikšme $x = 6$ šis skirtumas yra didžiausias ir lygus 6, nes prognozuojama reikšmė lygi 30, o lentelėje pateikta reikšmė lygi 24.	1	Už teisingą nustatymą, su kuria x reikšme gaunamas maksimalus skirtumas.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Paeiliui į lygtį $y = 4x$ įsistatykite lentelėje pateiktas x reikšmes. Kokias y reikšmes gaunate?

2 užuomina. Nustatykite, kurie lentelėje pateikti taškai (x, y) yra lygties $y = 4x$ sprendiniai.

2 užduotis

1 užuomina. Paeiliui į lygtį $y = 5x$ įsistatykite lentelėje pateiktas x reikšmes. Kokias y reikšmes gaunate?

2 užuomina. Kiekvienai lentelėje pateiktai x reikšmei apskaičiuokite jos prognozuojamą reikšmę pagal $y = 5x$. Kuriuo atveju skirtumas tarp prognozuojamų y reikšmių ir tarp lentelėje pateiktų faktinių y reikšmių yra didžiausias? Kuriuo atveju skirtumas lygus nuliui?

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrūpis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	9	Duomenys ir tikimybės	Duomenys ir jų interpretavimas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Duomenys ir jų interpretavimas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	2

1o (GIMANZIJS II) KLASĖ, MODELIAI IR SĄRYŠIAI

Tirpalo koncentracija

Bendroji įvestis

Mes visi nuolat susiduriame su įvairiais tirpalais ir sąvoka tirpalo koncentracija. Kur? Kad ir virtuvėje, kai gaminame valgi. Dažniausiai tirpalo koncentracija reiškia, kiek gramų tirpiosios medžiagos yra ištirpę tirpale procentais nuo visos tirpalo masės. Nors mokslo srityje gali pasitaikyti ir kitokių tirpalo koncentracijos apibrėžimų, mes šioje užduotyje remsimės būtent šiuo apibrėžimu.

Užduotys

1 užduotis

Chemijos mokytoja ištirpino 15 gramų valgomosios druskos reikiamame kiekyje vandens ir taip pagamino 20 % koncentracijos valgomosios druskos tirpalą. Kokia pagaminto tirpalo masė gramais?

2 užduotis

Mokytoja į indą įpylė 100 gramų 1 % koncentracijos valgomosios druskos tirpalo. Tada į tą patį indą įpylė dar 100 gramų 5 % koncentracijos valgomosios druskos tirpalo. Kokios koncentracijos valgomosios druskos tirpalas buvo gautas, inde sumaišius abu tirpalus? Užrašykite sprendimą.

3 užduotis

Į tuščią indą įpilta 120 gramų 1 % koncentracijos valgomosios druskos tirpalo. Kiek gramų 5 % koncentracijos valgomosios druskos tirpalo dar reikia įpilti į indą, kad tirpalus sumaišius gauto tirpalo koncentracija būtų 2 %? Užrašykite sprendimą.

4 užduotis

Chemijos mokytoja į indą įpylė 100 gramų 1 % koncentracijos valgomosios druskos tirpalo. Tada į tą patį indą įpylė dar x gramų 5 % koncentracijos valgomosios druskos tirpalo. Matematiškai pagrįskite, kad tokiu būdu gauto naujo valgomosios druskos tirpalo koncentracija visada bus mažesnė nei 5 %. Užrašykite sprendimą.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
Vadovaujantis koncentracijos apibrėžimu, galima teigti, kad 15 g yra 20 % (penktadalis) tirpalo masės. Todėl tirpalo masė yra $15 \cdot 5 = 75$ <i>Ats.: 75 g</i>	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastaba		
Teisingas atsakymas gali būti gautas skirtingais būdais, pavyzdžiui, taikant proporciją.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Valgomosios druskos masė gramais dviejuose šimtuose gramų naujojo tirpalo išreiškiama reiškiniu $100 \cdot 0,01 + 100 \cdot 0,05$.	1	Už pasirinktą teisingą uždavinio sprendimo būdą. Pateiktame sprendimo pavyzdyje teisingą sprendimo būdo pasirinkimą rodo geras sumanymas iš pradžių apskaičiuoti, kiek gramų valgomosios druskos yra 200 g sumaišyto tirpalo, o vėliau pritaikyti sumaišytam tirpalui koncentracijos skaičiavimo formulę.
$100 \cdot 0,01 + 100 \cdot 0,05 = 6$ Bendra sumaišyto tirpalo masė $100 + 100 = 200$	1	Už teisingai atliktus parengiamuosius veiksmus. Pateiktame sprendimo pavyzdyje – už sumaišyto tirpalo masės (200 g) apskaičiavimą (iš sprendimo matyti suvokimas, kad sumaišyto tirpalo yra 200 g) ir druskos masės sumaišytame tirpale apskaičiavimą.
Todėl sumaišyto tirpalo procentinė koncentracija: $\frac{6}{200} \cdot 100 = 3$ <i>Ats.: 3 %</i>	1	Už teisingą atsakymą, gautą pritaikius tirpalo koncentracijos radimo formulę.
Pastabos		
1 pastaba. Mokinys gali koncentracijos formulės atskirai neužrašyti, bet iš sprendimo turi būti aišku, kad jis supranta, kaip skaičiuojama tirpalo koncentracija. 2 pastaba. Galimi ir kiti įvairūs teisingi sprendimo būdai. Pavyzdžiui, mokinys gali iš karto išsivesti bendrą sumaišyto tirpalo formulę, kai į 100 g 1 % koncentracijos tirpalo įpilama x gramų 5 % koncentracijos tirpalo. Tuomet vertinimo instrukciją reiktų truputį pakoreguoti.		

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Pasižymime trūkstamą 5 % koncentracijos valgomosios druskos tirpalo masę x . Tada $120 + x$ gramų sumaišyto tirpalo bus $1,2 + 0,05 \cdot x$ gramų druskos.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo strategiją. Pateiktame sprendimo pavyzdyje pasirinkta strategija – uždavinio sąlygą

		sumodeliuoti lygtimi su vienu kintamuoju. Pateiktame sprendimo pavyzdyje tai indikuoja kintamojo x įsivedimas ir teisingo raidinio reiškinio druskos kiekiui sumaišytame tirpale užrašymas.
Bendra sumaišyto tirpalo masė $120 + x$. Sudarome lygtį sumaišyto tirpalo koncentracijai apskaičiuoti: $\frac{1,2+0,05 \cdot x}{120+x} \cdot 100 = \frac{120+5x}{120+x} = 2$, kur $x \geq 0$.	1	Už teisingą sąlygos matematinį sumodeliavimą. Pateiktame sprendimo pavyzdyje – tai sumodeliavimas lygtimi.
Sprendžiame lygtį: $120 + 5x = 240 + 2x$; $3x = 120$; Ats.: 40 g	1	Už gautą teisingą atsakymą.

4 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Druskos masė sumaišytame tirpale $100 \cdot 0,01 + x \cdot 0,05$ g	3	Už pasirinktą teisingą samprotavimo strategiją uždavinio situaciją sumodeliuoti matematine formule su vienu kintamuoju.
Todėl aprašytu būdu gauto tirpalo koncentraciją (procentais) galima užrašyti formule $k(x) = \frac{100+5x}{100+x}$. $k(x) = \frac{100+5x}{100+x} = \frac{100+400+5x}{100+x} = 5 - \frac{400}{100+x}$.	1	Už racionaliojo reiškinio pertvarkymą į pavidalą $k(x) = 5 - \frac{400}{100+x}$.
Reiškinys $\frac{400}{100+x} > 0$, kai $x \geq 0$, nes teigiamą skaičių dalijant iš teigiamo skaičiaus visada gaunamas teigiamas dalmuo. Išvada: $k(x) < 5$, kai $x \geq 0$. Pagrindimas baigtas.	1	Už pastebėjimą, kad $\frac{400}{100+x} > 0$, ir padarytą teisingą išvadą apie $k(x)$.
Pastaba		
Matematinio samprotavimo didaktikos požiūriu, labai svarbu, kad mokiniai pratintųsi paaiškinti, kodėl $\frac{400}{100+x} > 0$. Kai mokiniai įgyja daugiau matematinio mąstymo patirties, už vengimą paaiškinti jiems būtų didaktiškai tikslinga vienu tašku mažinti už uždavinio sprendimą gautų taškų skaičių.		

Užuominos mokiniui

1 uždutis

1 užuomina. Pagalvokite, kokią viso tirpalo masės dalį sudaro valgomosios druskos masė.

2 uždutis

1 užuomina. Apskaičiuokite iš dviejų tirpalų sumaišytame tirpale esančios valgomosios druskos masę.

2 užuomina. Jei žinote, kiek gramų druskos yra 200 gramų sumaišyto tirpalo, pritaikykite koncentracijos formulę ir apskaičiuokite tirpalo koncentraciją.

3 uždutis

1 užuomina. Pasižymėkite trūkstantį 5 % koncentracijos valgomosios druskos tirpalo masę x . Raidiniu reiškiniu užrašykite, kiek gramų druskos tada bus $120 + x$ gramų sumaišyto tirpalo.

2 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad sumaišius 120 gramų 1 % koncentracijos valgomosios druskos tirpalo ir x gramų 5 % koncentracijos valgomosios druskos tirpalo, naujojo tirpalo procentinę koncentraciją galima užrašyti raidiniu reiškiniu $\frac{120+5x}{120+x}$. Pagal uždavinio sąlygą sudarykite lygtį $\frac{120+5x}{120+x} = 2$ ir ją išspręskite.

4 uždutis

1 užuomina. Parodykite, kad tokiu būdu gauto tirpalo koncentraciją (procentais) galima užrašyti formule $k(x) = \frac{100-5x}{100+x}$.

2 užuomina. Pertvarkykite reiškinį $k(x) = \frac{100+5x}{100+x} = \frac{100+400+5x}{100+x} = 5 - \frac{400}{100+x}$.

3 užuomina. Dar kartą pagalvokite ir matematiškai užrašykite, ką reikia įrodyti. Išstirkite, ar gali funkcija $k(x)$, kai $x \geq 0$, įgyti reikšmes, lygias arba didesnes už 5.

Metaduomenys

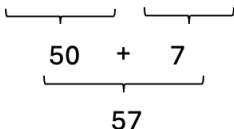
Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10 kl.	Modeliai ir sąryšiai	Algebra	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Slenkstini s	1
2			Algebra	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	3
3			Algebra	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindini s	3
4			Algebra	Loginis mąstymas ir įrodymai	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnys	3

Aštuntainė skaičiavimo sistema

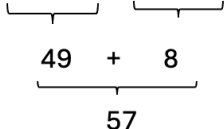
Bendroji įvestis

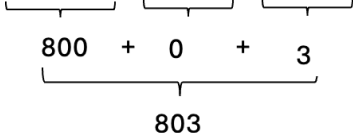
Kasdieniam gyvenimui esame įpratę naudoti dešimtainę skaičiavimo sistemą – skaičius užrašome skaitmenimis nuo 0 iki 9. Tačiau yra ir kitų būdų. Pavyzdžiui, kompiuterių srityje skaičiai užrašomi vien nuliais ir vienetais – tokia skaičiavimo sistema vadinama dvejetainė. Kompiuterinėse mikroschemose skaičių saugojimas ir apdorojimas taikant dvejetainę skaičiavimo sistemą yra daug patogesnis. Marija nusprendė išmokyti užrašyti skaičius aštuntaine skaičiavimo sistema. Joje skaičiai užrašomi tik skaitmenimis nuo 0 iki 7. Panagrinėkite pateiktus pavyzdžius, kaip tie patys skaičiai (57 ir 803) užrašomi dviem skirtingais būdais (pagal dešimtainę ir aštuntainę skaičiavimo sistemas).

Skaičius, išreikštas 10 pagrindu:

$$57_{10} = 5 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

$$\begin{array}{r} 50 + 7 \\ \hline 57 \end{array}$$

Skaičius, išreikštas 8 pagrindu:

$$71_8 = 7 \times 8^1 + 1 \times 8^0$$

$$\begin{array}{r} 49 + 8 \\ \hline 57 \end{array}$$

$$803_{10} = 8 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

$$\begin{array}{r} 800 + 0 + 3 \\ \hline 803 \end{array}$$

$$1443_8 = 1 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 3 \times 8^0$$

$$\begin{array}{r} 512 + 256 + 32 + 3 \\ \hline 803 \end{array}$$

Taigi įmonė, naudojanti aštuntainę skaičiavimo sistemą, į duomenų bazę rašys ne 57, o 71, ne 803, o 1443, ir tai reikš tą pačią reikšmę (t. y. $57_{10} = 71_8$, $803_{10} = 1443_8$).

Užduotys

1 užduotis

Dešimtainėje sistemoje skaičius užrašomas kaip 9. Užrašykite šį skaičių pagal aštuntainę sistemą. Parodykite, kaip gavote atsakymą.

2 užduotis

Pagal aštuntainę skaičiavimo sistemą užrašytus skaičius perrašykite dešimtaine skaičiavimo sistema:

$$17_8 = \underline{\hspace{2cm}}_{10}$$

$$53_8 = \underline{\hspace{2cm}}_{10}$$

Parodykite, kaip gavote atsakymą.

3 užduotis

Apskaičiuokite pateikto reiškinių rezultatą pagal dešimtainę ir aštuntainę sistemas:

$$75_{10} - 17_8 = \underline{\hspace{2cm}}_{10} = \underline{\hspace{2cm}}_8$$

Parodykite, kaip gavote atsakymą.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
$9_{10} = 1 \times 8^1 + 1 \times 8^0 = 11_8$	2	Po 1 tašką už teisingai apskaičiuotas dešimtis ir vienetus pagal aštuntainę sistemą (1 dešimtis ir 1 vienetas).
Pastabos		
Jei atsakymas užrašytas be aštuntainio indekso, taškai taip pat skiriami.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
$17_8 = 1 \times 8^1 + 7 \times 8^0 = 8 + 7 = 15_{10}$	1	Už teisingai užrašytą aštuntainį skaičių dešimtainiu.
$53_8 = 5 \times 8^1 + 3 \times 8^0 = 40 + 3 = 43_{10}$	1	Už teisingai užrašytą aštuntainį skaičių dešimtainiu.
Pastabos		
Jei atsakymai užrašyti be dešimtainio indekso, taškai taip pat skiriami.		

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
$17_8 = 1 \times 8^1 + 7 \times 8^0 = 8 + 7 = 15_{10}$	1	Už teisingai užrašytą aštuntainį skaičių dešimtainiu.
$75 - 15 = 60_{10}$	1	Už teisingai atliktą atimties veiksmą.
$60_{10} = 7 \times 8^1 + 4 \times 8^0 = 74_8$	1	Už teisingai užrašytą dešimtainį skaičių aštuntainiu.
Pastabos		
Jei atsakymai užrašyti be dešimtainio ir aštuntainio indeksų ir aišku kuris skaičius kurioje sistemoje užrašytas, taškai taip pat skiriami.		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Pabandykite atlikti užduotį: užrašykite dešimtainį skaičių 8 aštuntainiu skaičiumi. Pagalvokite, kodėl teisinga lygybė $8_{10} = 10_8$.

2 užuomina. Užrašykite, kiek pilnų aštuonetų sudaro skaičių 9 ir kiek vienetų lieka. Taip gausite skaitmenį, iš kurių sudarytas skaičius 9 aštuntainėje sistemoje.

2 užduotis

1 užuomina. Aštuntainėje skaičiavimo sistemoje kiekvienas skaitmuo reiškia atitinkamo laipsnio aštuoneto sandaugą.

2 užuomina. Įsistatykite aštuntainio skaičiaus skaitmenis į praleistas formulės vietas $___ \times 8^1 + ___ \times 8^0$ ir gausite, kam skaičius lygus dešimtainėje sistemoje. Atlikite tai su abiem duotais skaitmenimis.

3 užduotis

1 užuomina. Aštuntainį skaičių užrašykite dešimtainiu. Įrašykite aštuntainio skaičiaus skaitmenis į schemą $___ \times 8^1 + ___ \times 8^0$ ir apskaičiuokite šio reiškinių reikšmę, kad gautumėte dešimtainį skaičių.

2 užuomina. Iš dešimtainio skaičiaus atimkite dešimtainį skaičių.

3 užuomina. Dešimtainį rezultatą užrašykite aštuntainiu pavidalu. Nustatykite, kiek kartų iš dešimtainio skaičiaus galima atimti aštuonetą ir kiek vienetų lieka. Šiuos skaičius įrašykite į schemą $___ \times 8^1 + ___ \times 8^0$ – taip gausite šio skaičiaus skaitmenį pagal aštuntainę sistemą.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Modeliai ir sąryšiai	Dėsningumai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Dėsningumai	<i>Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas</i>	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	2
3			Dėsningumai	<i>Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas</i>	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	3

Fibonačio sekos savybė

Bendroji įvestis

Mokslo pasaulyje Fibonačio seka turi ypatingą reikšmę. Ja nusakomi dėsningumai aptinkami įvairiose gamtos srityse – nuo vaisių raštų formavimosi iki kosmoso kūnų fizikos.

Fibonačio sekos n -ąjį narį pažymėkime F_n . Pirmieji sekos nariai $F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$ yra:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5.$$

Fibonačio sekos narių savybė: sudėjus du šalia esančius skaičius, gaunamas kitas po jų einantis skaičius. Šią savybę galima apibendrinti taip:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad (\text{kai } n \geq 2).$$

Užduotys

1 užduotis

Remkitės duota savybe ir apskaičiuokite sekos narius F_6 ir F_7 .

2 užduotis

Šia užduotimi tirsime dar vieną Fibonačio sekos savybę.

Palyginkite F_3 su suma $F_0 + F_1$.

Palyginkite F_4 su suma $F_0 + F_1 + F_2$.

Palyginkite F_5 su suma $F_0 + F_1 + F_2 + F_3$.

Suformuluokite hipotezę apie F_{n+2} ir sumos $F_0 + F_1 + \dots + F_n$ ryšį. Pateikite ją kaip lygybę $F_{n+2} = \dots$.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Pagal Fibonačio sekos savybę: $F_4 + F_5 = F_6$, t. y. $3 + 5 = 8$ Ats.: $F_6 = 8$.	1	Už teisingą atsakymą.
Pagal Fibonačio sekos savybę: $F_5 + F_6 = F_7$, t. y. $5 + 8 = 13$ Ats.: $F_7 = 13$.	1	Už teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
$F_3 = 2 > 1 = F_0 + F_1$.	1	Už teisingai įrašytas sekos narių skaitines reikšmes ir teisingą palyginimą.
$F_4 = 3 > 2 = F_0 + F_1 + F_2$.	1	Už teisingai įrašytas sekos narių skaitines reikšmes ir teisingą palyginimą.
$F_5 = 5 > 4 = F_0 + F_1 + F_2 + F_3$.	1	Už teisingai įrašytas sekos narių skaitines reikšmes ir teisingą palyginimą.
$F_{n+2} = 1 + F_0 + F_1 + \dots + F_n$. Ats.: $F_{n+2} = 1 + F_0 + F_1 + \dots + F_n$.	1	Už teisingai užrašytą lygybę.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Kuriuos du sekos narius turite sudėti, kad gautumėte sekos narį F_6 ?

2 užuomina. Sudėkite narius F_4 ir F_5 – gausite F_6 . Kokius du sekos narius reikia sudėti, norint gauti narį F_7 ?

2 užduotis

1 užuomina. Palyginkite kiekvieną iš trijų sąlygoje duotų porų – nustatykite, kuri reikšmė kiekvienu atveju didesnė.

2 užuomina. Kai nustatysite visas tris nelygybes, atkreipkite dėmesį, keliais vienetais skiriasi skirtingose nelygybių pusėse esantys dydžiai.

3 užuomina. Per sumą $F_0 + F_1 + \dots + F_n$ išreikškite, kam lygus narys F_{n+2} . Kiek vienetų reikia pridėti prie sumos $F_0 + F_1 + \dots + F_n$, kad rezultatas būtų lygus F_{n+2} ?

Metaduomenys

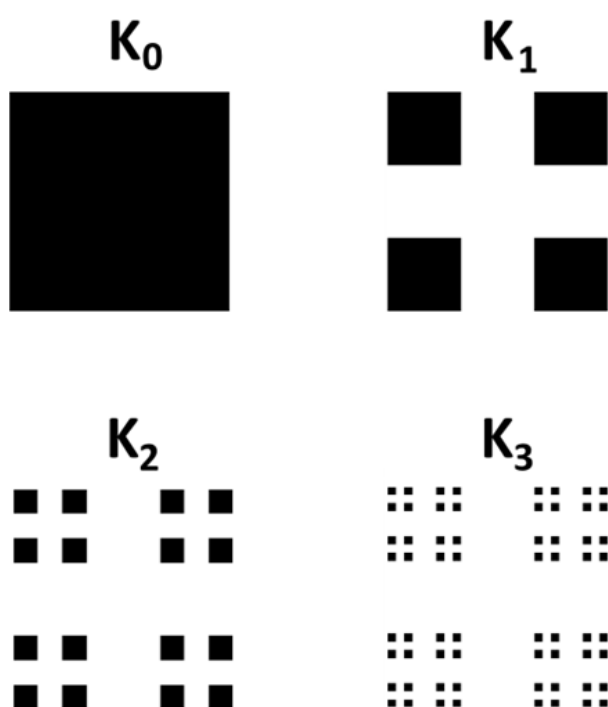
Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Modeliai ir sąryšiai	Dėsningumai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Dėsningumai	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	4

Kantoro dulkės 1

Bendroji įvestis

Susipažinkite su viena iš įdomių matematinių sekų – Kantoro dulkėmis. Šią seką galima sudaryti įvairiais būdais, pavyzdžiui, iš kvadrato.

Turime visą kvadratą. Iš pradžių jo ilgį ir aukštį padaliname į tris lygias dalis ir iškerpame vidurinę stulpelį bei vidurinę eilutę. Kiekvienu tolesniu žingsniu pakartojame tą patį su kiekvienu iš anksčiau gautų kvadratėlių. Šis procesas pavaizduotas paveiksle, čia K_i – Kantoro dulkės kvadrato po i žingsnių.



Užduotys

1 užduotis

Pradinė figūra yra vienas juodas kvadratas (K_0), kurio plotas lygus 1.

Kiek juodų kvadratėlių yra po pirmo žingsnio figūroje K_1 ? Kam lygus bendras šių K_1 figūroje esančių juodų kvadratėlių užimamas plotas?

|

2 užduotis

Pradinė figūra yra vienas juodas kvadratas (K_0), kurio plotas lygus S .

Kiek juodų kvadratėlių yra n -oje figūroje K_n ? Kam lygus n -oje figūroje K_n esančių juodų kvadratėlių bendras plotas?

3 užduotis

Kantoro dulkių seka konstruojama iš atkarpos. Pradedama nuo atkarpos, kurios ilgis yra L . Pirmu žingsniu iškerpamas jos vidurinis trečdalis ir gaunamos dvi mažesnės atkarpos. Kiekvienu tolesniu žingsniu iš kiekvienos likusios vientisos atkarpos iškerpamas vidurinis trečdalis.

Kiek atkarpų tokioje figūroje bus po 2 žingsnių? Po 3 žingsnių? Pastebėkite dėsnį ir užrašykite, kiek atkarpų bus tokioje figūroje po n žingsnių?

Kam lygus vienos atkarpos ilgis po 2 žingsnių? Po 3 žingsnių? Pastebėkite dėsnį ir užrašykite, kam lygus vienos atkarpos ilgis po n žingsnių?

Pagal tai užrašykite, kam turėtų būti lygus bendras atkarpų ilgis po n žingsnių.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Figūroje K_1 esančių kvadratėlių skaičius: 4.	1	Už teisingą atsakymą.
Figūros K_1 kvadratėlių plotas: $4/9$.	1	Už teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Figūroje K_n esančių kvadratėlių skaičius: 4^n .	1	Už teisingą atsakymą.
Figūros K_n kvadratėlių plotas yra: $S \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$.	1	Už teisingą atsakymą.
Pastabos		
Taškai skiriami ir tuo atveju, jei atsakymas nepaiškintas.		

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Atkarpų skaičius po n žingsnių: 2^n .	1	Už teisingą atsakymą.
Vienos atkarpos ilgis po n žingsnių: $L \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$.	1	Už teisingą atsakymą.
Bendras atkarpų ilgis po n žingsnių: $L \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$.	1	Už teisingą atsakymą.
Pastabos		
Taškai skiriami ir tuo atveju, jei atsakymas nepaiškintas.		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Pateiktame paveiksle suskaičiuokite, kiek mažesnių kvadratėlių yra figūroje K_1 .

2 užuomina. Kad apskaičiuotumėte plotą, pagalvokite, į kiek tokio dydžio kvadratėlių buvo padalinta pradinė figūra. Kiek iš šių kvadratėlių nuspalvinta juodai?

2 užduotis

1 užuomina. Pastebėkite dėsnį – į kiek juodų kvadratėlių virsta kvadratis po kiekvieno žingsnio?

2 užuomina. Pastebėkite dėsnį – kokia kvadratis dalis lieka nuspalvinta po kiekvieno žingsnio?

3 užduotis

1 užuomina. Nusibraižykite šią situaciją. Pastebėkite dėsnį – į kiek atkarpų padalinama atkarpa po kiekvieno žingsnio?

2 užuomina. Pastebėkite dėsnį – kokia atkarpos dalis lieka nuspalvinta po kiekvieno žingsnio?

3 užuomina. Jei žinote vienos atkarpos ilgį ir visų atkarpų skaičių, kaip galite rasti jų visų bendrą ilgį?

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Modeliai ir sąryšiai	Dėsningumai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Dėsningumai	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Pagrindinis	2
3			Dėsningumai	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	3

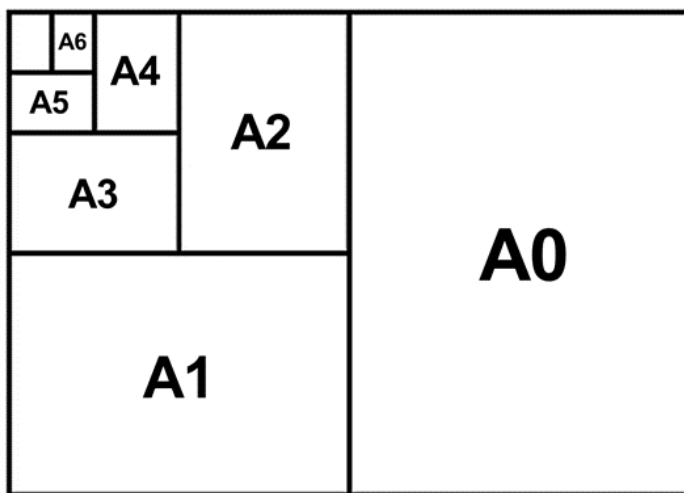
Popieriaus lapai

Bendroji įvestis

Pasaulyje plačiai naudojamas A serijos lapų formatas. Didžiausias lapas yra A0 formato ir jo plotas lygus 1 m^2 .

Jei A0 lapą perkirpsime pusiau palei ilgąją kraštinę, gausime du A1 formato lapus. Taigi A1 lapo plotas lygus $0,5 \text{ m}^2$. A2 lapo plotas lygus $0,25 \text{ m}^2$ ir t. t.

Be to, visų A formato lapų ilgesnioji kraštinė yra $\sqrt{2}$ karto ilgesnė už jų trumpesniąją kraštinę.



Užduotys

1 užduotis

Pastebėkite dėsningumą ir apskaičiuokite:

- Kam lygus A3 formato lapo plotas?
- Kam lygus A4 formato lapo plotas?

2 užduotis

Nustatykite A0 formato lapo ir A1 formato lapo trumpesniųjų kraštinių santykį.

3 užduotis

Apskaičiuokite A0 formato lapo plotį ir aukštį. Pateikite atsakymą milimetrais, suapvalinkite iki sveikojo skaičiaus.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
A3 formato lapo plotas lygus: $\frac{0,25}{2} = 0,125 \text{ m}^2$.	1	Už gautą teisingą A3 formato lapo plotą.
A4 formato lapo plotas lygus: $\frac{0,125}{2} = 0,0625 \text{ m}^2$.	1	Už gautą teisingą A4 formato lapo plotą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Pasižymime A0 formato lapo trumpesniosios kraštinės ilgį raide c . Tada A0 formato lapo ilgesnioji kraštinė lygi $\sqrt{2} \cdot c$, todėl A1 formato lapo trumpesnioji kraštinė lygi $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot c$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (teisingai nustatytą A1 formato lapo trumpesniosios kraštinės ilgį).
Vadinasi, A0 ir A1 lapų trumpesniųjų kraštinių ilgių santykis yra: $\frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot c} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą (suprastinimą iki $\sqrt{2}$).
Pastabos		
Vietoje c gali būti naudojamas bet kuris nuliui nelygus racionalusis skaičius, taškai skiriami tuo pačiu būdu.		

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Sakykime, kad A0 formato lapo plotis – x , tuomet aukštis bus $\sqrt{2} \cdot x$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (pločio ir aukščio išreiškimą, taikant kraštinių ilgių santykį).
arba $\sqrt{2} \cdot x^2 = 1 \text{ m}^2$ $\sqrt{2} \cdot x^2 = 1\,000\,000 \text{ mm}^2$.	1	Už sudarytą teisingą lygtį.
Lapo plotis lygus: $x = \sqrt{\frac{1\,000\,000}{\sqrt{2}}} \approx 841 \text{ mm}$.	1	Už teisingai apskaičiuotą ir iki sveikojo skaičiaus suapvalintą lapo plotį.
Lapo aukštis lygus: $841 \cdot \sqrt{2} \approx 1\,189 \text{ mm}$.	1	Už teisingai apskaičiuotą ir iki sveikojo skaičiaus suapvalintą lapo aukštį.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Iš pateikto užduoties aprašymo pastebėkite dėsninę sąryšį – kiek kartų sumažėja lapo plotas, jei palygintumėte A0 ir A1 formato lapus?

2 užuomina. Jei sąlygoje pateiktam A2 lapo plotui pritaikysite pastebėtą dėsninę sąryšį, koks turėtų būti A3 formato lapo plotas? Pritaikykite dėsninę sąryšį dar kartą – kokį gausite A4 lapo plotą?

2 užduotis

1 užuomina. Užduotį galite išspręsti ir jei nežinote, kokio tiksliai ilgio yra kraštinės. Pasižymėkite, A0 lapo trumpesniosios kraštinės ilgį raide c . Pagalvokite, kam tada lygus A0 formato lapo ilgesniosios kraštinės ilgis. Kam lygus A1 lapo trumpesniosios kraštinės ilgis? Užrašykite šiuos ilgius per c .

2 užuomina. Nustatykite, kokią dalį A0 lapo ilgesniosios kraštinės sudaro A1 lapo trumpesnioji kraštinė. Pagal tai užrašykite A0 ir A1 lapų trumpesniųjų kraštinių santykį.

3 užduotis

1 užuomina. Pasižymėkite A0 lapo plotą x . Kam tada lygus A0 lapo aukštis?

2 užuomina. Iš gautų A0 formato lapo ploto ir aukščio nustatykite, kam lygus jo plotas. Prilyginkite jį 1 m^2 arba $1\,000\,000\text{ mm}^2$. Išspręskite lygtį ir apskaičiuokite x reikšmę. Nepamirškite suapvalinti iki sveikojo skaičiaus.

3 užuomina. Su gauta x reikšme apskaičiuokite, kam turėtų būti lygus A0 formato lapo aukštis. Nepamirškite suapvalinti iki sveikojo skaičiaus.

Metaduomenys

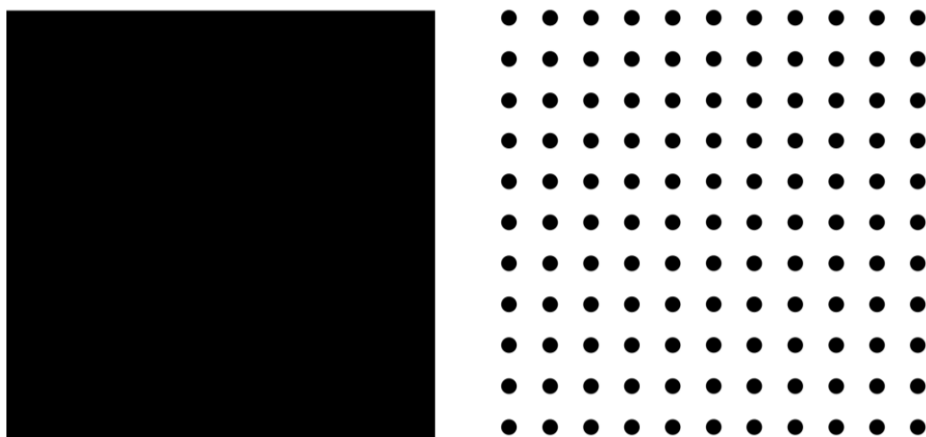
Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Modeliai ir sąryšiai	Dėsningumai	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Dėsningumai	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Gilus supratimas ir argumentavimas.	AMG	Pagrindinis	2
3			Dėsningumai	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	4

Diskretizavimas

Bendroji įvestis

Daugybę gamtos reiškinių ir dėsnių galima modeliuoti matematiškai. Pavyzdžiui, chemines reakcijas, kūnų judėjimo ar deformacijos problemas, atmosferos reiškinius. Tokiais skaičiavimais įprastai nagrinėjamas konkretus objektas, kuriame vyksta procesas.

Dažniausiai vietoje viso objekto patogiau nagrinėti tik dalį jo taškų. Pavyzdžiui, vietoje viso kvadrato galima nagrinėti jį kaip tolygiai pasiskirsčiusių taškų rinkinį. Tokio rinkinio taškai yra tinklo, sudaryto iš lygiagrečių atkarpų, kurios suskaido kvadratą į vienodo dydžio kvadratėlius ar stačiakampius, viršūnės:



Objekto pakeitimas taškų rinkiniu vadinamas diskretizavimu, o taškų rinkinys – diskrečiuoju tinklu.

Užduotys

1 užduotis

1 metro ilgio atkarpoje išdėstyti 6 taškai taip, kad pirmasis taškas yra atkarpos pradžioje, paskutinis taškas – atkarpos pabaigoje, o atstumas tarp bet kurių gretimų taškų lygus.

- Į kiek vienodo ilgio intervalų buvo padalyta atkarpa?
- Kokiu atstumu nuo atkarpos pradžios yra trečiasis iš šešių taškų?

2 užduotis

Diskretizuotas kvadratas, kurio kraštinės ilgis $a = 1$ m. Palei jo plotį tinklo taškai išdėlioti kas 0,05 m, o palei jo aukštį – kas 0,025 m.

Apskaičiuokite, kiek taškų sudaro kvadrato diskretųjį tinklą.

Atkreipkite dėmesį, kad kiekvienoje vertikalioje ir horizontalioje eilėje pirmas ir paskutinis taškai yra ties kvadrato kraštais.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Atkarpa padalyta į 5 vienodo ilgio intervalus.	1	Už pateiktą teisingą intervalų skaičių.
Trečiojo taško atstumas nuo atkarpos pradžios yra 0,4 m.	1	Už pateiktą teisingą trečiojo taško atstumą nuo atkarpos pradžios.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Taškų skaičius horizontalioje eilėje: $\frac{1}{0,05} + 1 = 21$.	1	Už teisingai apskaičiuotą taškų skaičių horizontalioje eilėje.
Taškų skaičius vertikalioje eilėje: $\frac{1}{0,025} + 1 = 41$.	1	Už teisingai apskaičiuotą taškų skaičių vertikalioje eilėje.
Iš viso taškų: $21 \cdot 41 = 861$.	1	Už teisingai apskaičiuotą bendrą taškų skaičių.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Vizualizuokite užduoties sprendimą: nubrėžkite atkarpą ir joje pažymėkite taškus.

2 užuomina. Jeigu vienoje tiesėje išdėlioti 6 taškai, kiek „tarpų“ tarp kaimyninių taškų galite suskaičiuoti?

2 užduotis

1 užuomina. Jeigu 100 cm atkarpoje taškai sudėti kas 5 cm, kiek taškų iš viso bus šioje atkarpoje? Atkreipkite dėmesį, kad pirmas ir paskutinis taškai sutampa su atkarpos pradžia ir pabaiga.

2 užuomina. Jeigu 100 cm atkarpoje taškai sudėti kas 2,5 cm, kiek taškų iš viso bus šioje atkarpoje? Atkreipkite dėmesį, kad pirmas ir paskutinis taškai sutampa su atkarpos pradžia ir pabaiga.

3 užuomina. Kai jau apskaičiavote, kiek taškų yra vertikalioje ir horizontalioje eilėse, sudauginkite šiuos dydžius ir rasite, kiek taškų yra visame tinkle.

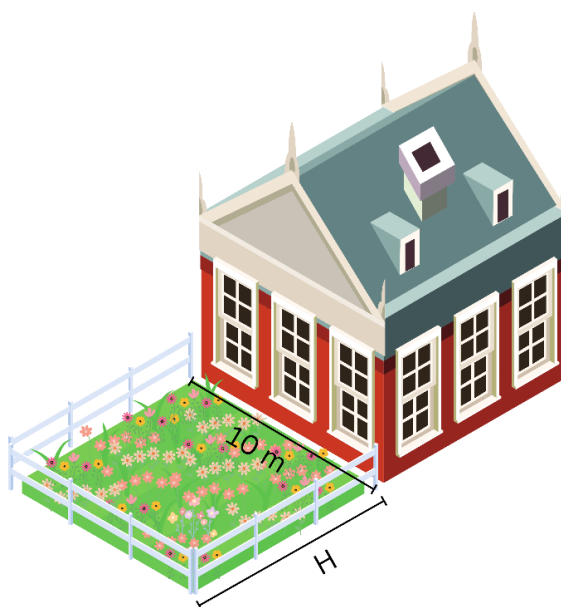
Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Modeliai ir sąryšiai	Dėsningumai	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Dėsningumai	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Pagrindinis	3

Gėlyno planas 1

Bendroji įvestis

Sodininkas gavo užduotį palei namo sienos įrengti stačiakampį gėlyną. Gėlynas turės būti aptvertas tvora iš trijų pusių (palei namo sieną tvoros nereikia). Namo sienos ilgis yra 10 metrų. Gėlyno plotį žymėsime H . Sodininkas turi 20 metrų tvoros ir tiek gėlių sodinukų, kiek užtektų apsodinti 42 m^2 teritoriją.



Užduotys

1 užduotis

Sodininkas ketina įrengti gėlyną, kurio plotis $H = 5$ metrai, o ilgis – 10 metrų. Ar užtektų gėlių sodinukų tokio dydžio gėlynui visiškai apsodinti? Ar užtektų tvoros? Atsakymus argumentuokite.

2 užduotis

Apskaičiuokite, kokiai skaičių aibei turi priklausyti gėlyno plotis H , kad sodininkas panaudotų lygiai 20 metrų tvoros ir kad jam užtektų gėlių sodinukų visam aptvertam plotui apsodinti (nei gėlyno ilgis, nei plotis negali būti 0 metrų).

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Apskaičiuojame gėlyno plotą: $S = 5 \cdot 10 = 50 \text{ m}^2$.	1	Už teisingai apskaičiuotą gėlyno plotą.
Apskaičiuojame reikiamą tvoros ilgį: $5 + 10 + 5 = 20 \text{ m}$.	1	Už teisingai apskaičiuotą tvoros ilgį.
Gėlių neužtektų, nes $50 > 42$.	1	Už padarytą teisingą išvadą, kad gėlių sodinukų neužteks.
Tvoros užtektų, nes jos yra 20 m.	1	Už padarytą teisingą išvadą, kad tvoros užteks.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
Apskaičiuojame gėlyno plotą: $S = H \cdot (20 - 2 \cdot H)$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą gėlyno plotą išreikšti per H .
Gauname kvadratinę nelygybę: $H \cdot (20 - 2 \cdot H) \leq 42$ arba $2 \cdot H^2 - 20 \cdot H + 42 \geq 0$.	1	Už gautą teisingą kvadratinę nelygybę.
Atitinkamos kvadratinės lygties sprendiniai: $H_1 = 3, H_2 = 7$.	1	Už gautus teisingus atitinkamos kvadratinės lygties sprendinius.
Sprendžiame algebriniu būdu ir iš nelygybių sistemų $\begin{cases} x - 3 \geq 0, \\ x - 7 \geq 0, \end{cases}$ ir $\begin{cases} x - 3 \leq 0, \\ x - 7 \leq 0, \end{cases}$ gauname, kad kai $x \leq 3$ arba $x \geq 7$, tada nelygybė teisinga, o kai $3 < x < 7$, nelygybė yra neteisinga.	1	Už teisingai išspręstą nelygybių sistemą.
Ats.: $H \in (0; 3] \cup [7; 10)$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Penktasis taškas neskiriamas, jei ties 0 arba 10 reikšme nurodytas uždaras intervalas.		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite stačiakampio ploto formulę ir apskaičiuokite, koks būtų tokio gėlyno plotas.

2 užuomina. Apskaičiuokite, koks būtų tvoros ilgis. Atkreipkite dėmesį, kad tik trys gėlyno kraštinės bus aptvertos tvora.

3 užuomina. Palyginkite apskaičiuotą plotą ir tvoros ilgį su sąlygoje duotais dydžiais ir atsakykite: ar užtektų gėlių? Ar užtektų tvoros?

2 užduotis

1 užuomina. Užrašykite gėlyno plotą kaip funkciją, priklausančią nuo jo pločio H . Žinoma, kad gėlyno plotas turi būti ne didesnis nei 42. Taigi sudarykite nelygybę ir ją išspręskite.

2 užuomina. Gautą kvadratinę nelygybę užrašykite tiesinių nelygybių sistema.

3 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kokie papildomi apribojimai paminėti sąlygoje apie gėlyno plotį H . Nepamirškite jų suderinti su gautu atsakymu.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Modeliai ir sąryšiai	Algebra (kvadratinės nelygybės)	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	4
2			Algebra (kvadratinės nelygybės)	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	5

Racionaliųjų funkcijų skaidymas

Bendroji įvestis

Atliekant skaičiavimus su sudėtingomis racionaliosiomis funkcijomis, gali būti patogu jas perrašyti kitokių pavidalu. Tam gali būti taikomas racionaliųjų funkcijų skaidymo metodas.

Pagal šį metodą, racionaliąją funkciją $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ galima išskaidyti į dviejų narių sumą:

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}.$$

Atkreipkite dėmesį, kad šiuo metodu išskaidoma pagal tai, kokie nariai yra sudauginti racionaliosios funkcijos vardiklyje. Mūsų pavyzdyje sudauginti nariai yra x ir $x+1$, todėl tokie yra ir atskirtų trupmenų vardikliai.

Gautų narių skaitikliuose esantys skaičiai (pavyzdyje 1 ir -1) apskaičiuojami taip: visų pirma nežinomos skaitiklių reikšmės pažymimos A ir B raidėmis, tada atskiri nariai subendravardiklinami ir pagal gautą reiškinį apskaičiuojamos A ir B reikšmės.

Užduotys

1 užduotis

Žinoma, kad ši lygybė teisinga su visomis apibrėžimo srities reikšmėmis (x – visi realieji skaičiai, išskyrus -2 ir -1). Apskaičiuokite B reikšmę.

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{B}{x+2}.$$

2 užduotis

Žinoma, kad ši lygybė teisinga su visomis apibrėžimo srities reikšmėmis (x – visi realieji skaičiai, išskyrus -2 ir 0). Apskaičiuokite A reikšmę.

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} - \frac{A}{x+2}.$$

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Subendravardikliname ir gauname: $\frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x+2} = \frac{x+2-(x+1)}{(x+1)(x+2)}$	1	Už gautą teisingą subendravardiklintą reiškinį.
Sutraukiame panašiuosius narius ir gauname, kad reiškinys lygus sąlygoje duotajam: $\frac{x+2-(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Subendravardikliname dešinę lygties pusę ir gauname: $\frac{A}{x} - \frac{A}{x+2} = \frac{A(x+2)-Ax}{x(x+2)}$	1	Už gautą teisingą subendravardiklintą reiškinį.
Sutraukiame panašiuosius narius ir gauname: $\frac{2A}{x(x+2)} = \frac{1}{x(x+2)}$ arba $2A = 1, \text{ kai } x \neq -2 \text{ ir } x \neq 0$	1	Už gautą teisingą lygtį A reikšmei apskaičiuoti.
Ats.: $A = 0,5$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Įsistatykite A ir B reikšmes į sąlygoje pateiktą išskaidytą dviejų narių reiškinį $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$.

2 užuomina. Subendravardiklinkite abu narius.

3 užuomina. Sutraukite panašiuosius narius gauto reiškinio skaitiklyje. Įsitikinkite, kad gavote tą patį reiškinį, koks nurodytas sąlygoje.

2 užduotis

1 užuomina. Subendravardiklinkite abu narius.

2 užuomina. Sutraukite panašiuosius narius gauto reiškinio skaitiklyje.

3 užuomina. Prilyginkite gautą reiškinį sąlygoje duotajam ir pagal tai nustatykite, kokia turi būti A reikšmė, kad galiotų lygybė.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Modeliai ir sąryšiai	Algebra	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Algebra	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3

Automobilio draudimo kainos

Bendroji įvestis

Emilija ką tik išsilaikė vairavimo egzaminą ir įsigijo automobilį, kurį apdraudė privalomuoju civilinės atsakomybės draudimu. Pradinė draudimo bendrovės pasiūlyta draudimo kaina – 300 eurų per metus.

Tačiau draudimo kaina gali keistis atsižvelgiant į vairavimo istoriją. Jei Emilija vairuos saugiai ir išvengs nelaimingų atsitikimų, kitais metais draudimo kaina sumažės 10 %. Tačiau jei sukels avariją, kitais metais draudimo kaina 20 % padidės. Jei per metus Emilija padarys kelias avarijas, draudimo kaina kiekvieną kartą didės po 20 % nuo naujai apskaičiuotos sumos.

Užduotys

1 užduotis

Emilija nori sužinoti, kokia būtų automobilio draudimo kaina antraisiais metais, jeigu pirmaisiais padarytų vieną avariją. Savo atsakymą pagrįskite skaičiavimais.

2 užduotis

Emilija vairuoja labai atsargiai ir nedaro avarijų. Kiek ji mokės už draudimą po trejų metų, jei kiekvienais metais kaina bus 10 % mažesnė nei ankstesniais metais?

3 užduotis

Pirmaisiais vairavimo metais Emilija padarė avariją, antraisiais vairavo saugiai, o trečiaisiais – vėl padarė avariją. Tokia tendencija tapo dėsninga – Emilija kas antrus padaro po avariją.

Sudarykite bendrą formulę, pagal kurią būtų galima apskaičiuoti draudimo kainą po n metų, kai n yra natūralusis lyginis skaičius. Pasinaudokite šia formule ir apskaičiuokite, kiek Emilija mokės už draudimą po 20 metų, jei tokia tendencija išliks. Atsakymą eurai suapvalinkite iki sveikojo skaičiaus.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Padarius avariją pirmaisiais metais, draudimo kaina antraisiais metais padidės 20 %. Vadinasi, ji padidės 1,2 karto: $300 \cdot 1,2 = 360$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Ats.: 360 eurų.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
1 būdas Nepadarius avarijų, draudimo kaina po 3 metų būtų: $300 \cdot 0,9^3$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Ats.: 218,7 euro.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
2 būdas Kaina kiekvienais metais skaičiuojama atskirai. Kaina po metų – 270 eurų. Kaina po 2 metų – 243 eurai.	1	Už teisingai apskaičiuotą draudimo kainą po 2 metų.
Ats.: 218,7 euro.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Kainos pokytis per 2 metus: $1,2 \cdot 0,9$ arba 1,08.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Draudimo kainos po n metų formulė: $300 \cdot (1,2 \cdot 0,9)^{n/2}$. arba $300 \cdot (1,08)^{n/2}$.	1	Už sudarytą teisingą formulę draudimo kainai po n metų apskaičiuoti.
Po 20 metų draudimo kaina bus: $300 \cdot (1,08)^{20/2} \approx 648$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Žinote pradinę draudimo kainą ir kainos padidėjimą procentais padarius avariją. Kaip, žinant šiuos du dydžius, apskaičiuoti kainos padidėjimą? Kaip apskaičiuoti galutinę kainą?

2 užuomina. Pradinė draudimo kaina yra 300 eurų, ji padidėja 20 %. Sudauginkite šiuos dydžius, padalykite sandaugą iš 100 % ir nustatysite, kiek eurų padidėjo kaina. Kokia tuomet yra naujoji kaina?

2 užduotis

1 užuomina. Per metus nepadarius avarijos draudimo kaina sumažėja 10 %. Kokia yra naujoji kaina antraisiais metais? Kokia kainos dalis išlieka po tokio sumažėjimo?

2 užuomina. Nustatykite, iš kokio skaičiaus reikia dauginti draudimo kainą, kad ji sumažėtų 10 %. Padauginkite 300 iš šio skaičiaus tris kartus ir apskaičiuokite rezultatą.

3 užuomina. Dauginant skaičių iš 0,9, jis sumažėja 10 %. Kaip galima apskaičiuoti, kam lygus skaičius 300, jei jį tris kartus sumažinsite po 10 %?

3 užduotis

1 užuomina. Jei pirmais metais kaina padidėjo 20 %, o antraisiais metais sumažėjo 10 %, kam lygus kainos pokytis per 2 metus iš eilės? Atkreipkite dėmesį, kad procentus reikia ne sudėti ar atimti tarpusavyje, o sudauginti šiuos procentus atitinkančius daugiklius (pavyzdžiui, 99 % atitinkantis daugiklis yra 0,99).

2 užuomina. Kiek kartų skaičių 300 reikia sudauginti su kainos pokyčiu per 2 metus, jei praeina n metų ir n – lyginis skaičius? Pagal tai sudarykite formulę draudimo kainai apskaičiuoti po n metų ir raskite jos reikšmę, kai $n = 20$.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Modeliai ir sąryšiai	Dėsningumai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Dėsningumai	<i>Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas</i>	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	2
3			Dėsningumai	<i>Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas</i>	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	3

Nuomonės formavimas ir algoritmai

Bendroji įvestis

Lina mėgsta žiūrėti vaizdo įrašus vienoje iš socialinių platformų. Prieš kelis mėnesius ji pradėjo domėtis sveika mityba ir sportu, todėl peržiūrėjo keletą filmukų apie dietas ir treniruotes. Dabar beveik visi socialinėje platformoje jai siūlomi vaizdo įrašai susiję su šia tema, nors mergina norėtų rasti ir kitokio turinio.

Socialinių tinklų algoritmai grindžiami vartotojų elgesiu – jie siūlo daugiau tokio turinio, kuris jau anksčiau patiko ar buvo ilgiau žiūrimas. Kai Lina dažniau žiūri tam tikros kategorijos filmukus, algoritmo mechanizmas įsimena jos pasirinkimus ir vis dažniau siūlo tos pačios tematikos įrašus.

Vienas pagrindinių veiksmų, kuriuo remiasi socialinių platformų pasiūlymų sistema, – žiūrėjimo laiko procentinė dalis. Algoritmas kiekvienos dienos pabaigoje kategorijų pasiūlymų indeksus pakeičia tokiu principu:

- Jei vartotojas žiūri tam tikros kategorijos vaizdo įrašus daugiau nei 60 % viso dienos laiko, algoritme šios kategorijos žinučių pasiūlymų skaičius padidėja 20 % dalimi.
- Jei vartotojas žiūri mažiau nei 30 %, šios kategorijos žinučių pasiūlymų skaičius sumažėja 30 % dalimi.
- Kitais atvejais proporcija išlieka tokia pati.

Užduotys

1 užduotis

Pirmą dieną Linos sveikos gyvensenos vaizdo įrašų pasiūlymų indeksas buvo lygus 50. Tada dvi dienas Lina 70 % viso savo laiko, praleisto socialinėje platformoje, žiūrėjo tik sveikos gyvensenos vaizdo įrašus. Kaip pasikeitė šios kategorijos pasiūlymų indeksas? Apskaičiuokite jį.

2 užduotis

Lina pastebėjo, kad vienos kategorijos jos pasiūlymų indeksas pasiekė 200. Ji nusprendė sumažinti sveikos gyvensenos vaizdo įrašų žiūrėjimo laiką iki 25 % viso žiūrėjimo laiko. Koks bus sveikos gyvensenos turinio pasiūlymų indeksas po dviejų dienų?

3 užduotis

Lina nutarė kiekvieną dieną daugiau nei 60 % laiko žiūrėti sveikos gyvensenos įrašus. Iš pradžių šios kategorijos pasiūlymų indeksas buvo lygus 100. Kam jis bus lygus po n dienų (n – natūralusis skaičius)? Per kiek dienų jis pakils nuo 100 iki 200?

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
1 būdas Po 2 dienų pasiūlymų indeksas būtų: $50 \cdot 1,2^2$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Ats.: 72.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
2 būdas Po 1 dienos pasiūlymų indeksas būtų: $50 \cdot 1,2 = 60$.	1	Už teisingai apskaičiuotą pasiūlymų indeksą po 1 dienos.
Po 2 dienų pasiūlymų indeksas būtų: $60 \cdot 1,2 = 72$. Ats.: 72.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
1 būdas Po 2 dienų pasiūlymų indeksas būtų: $200 \cdot 0,7^2$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Ats.: 98.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
2 būdas Po 1 dienos pasiūlymų indeksas būtų: $200 \cdot 0,7 = 140$.	1	Už teisingai apskaičiuotą pasiūlymų indeksą po 1 dienos.
Po 2 dienų pasiūlymų indeksas būtų: $140 \cdot 0,7 = 98$. Ats.: 98.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Pasiūlymų indeksas po n dienų: $100 \cdot 1,2^n$.	1	Už gautą teisingą formulę indeksui po n dienų apskaičiuoti.
Po 3 dienų indeksas lygus 172,8, o po 4 dienų – 207,36. Ats.: po 4 dienų.	1	Už gautą teisingą atsakymą (dienų skaičių).

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Jei prie 50 pridėsite 20 % šio skaičiaus, kokį skaičių gausite?

2 užuomina. Jei prie gauto skaičiaus pridėsite 20 % jo dydžio, kokį atsakymą gausite?

2 užduotis

1 užuomina. Jei iš 200 atimsite 30 % šio skaičiaus, kokį skaičių gausite?

2 užuomina. Jei iš gauto skaičiaus atimsite 30 % jo dydžio, kokį atsakymą gausite?

3 užduotis

1 užuomina. Skaičių padidinus 20 %, kokią proporciją tai atitinka? Kitaip sakant, iš kokio dydžio turėtumėte padauginti skaičių, kad jis padidėtų 20 % (arba 0,2 dalimi)?

2 užuomina. Žinote, kad dauginant skaičių iš 1,2 gaunama tas pat, kas didinant skaičių 20 %. Kaip galite užrašyti reiškinį pasiūlymų indeksui po n dienų apskaičiuoti? Atkreipkite dėmesį, kad iš pradžių pasiūlymų indeksas yra 100.

3 užuomina. Apskaičiuokite, kiek kartų reikia pasiūlymų indeksą 100 padauginti iš 1,2, kad rezultatas pasiektų 200.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Modeliai ir sąryšiai	Dėsningumai	<i>Matematinis komunikavimas</i>	<i>Matematinis komunikavimas</i>	AMG	Patenkinamas	2
2			Dėsningumai	<i>Matematinis komunikavimas</i>	<i>Matematinis komunikavimas</i>	AMG	Patenkinamas	2
3			Dėsningumai	<i>Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas</i>	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Pagrindinis	2

Asana taškai

Bendroji įvestis

„Asana“ – tai viena populiariausių užduočių ir projektų valdymo platformų, naudojama darbams organizuoti, progresui stebėti ir komandų pajėgumams planuoti. Ji leidžia suskirstyti darbus į mažesnes užduotis, priskirti atsakomybes ir stebėti, ar užduotys atliekamos pagal numatytus terminus.

„Asana“ taškai (angl. *story points*) – tai metodas, taikomas projektų valdymo komandoms užduočių sudėtingumui įvertinti. Projekto „Asana“ taškų skaičius tiesiogiai neparodo, kiek laiko reikės užduočiai atlikti, bet nusako reikalingų pastangų, rizikos ir sudėtingumo lygį.

Pavyzdžiui, naujo nedidelio tinklalapio sukūrimas vertinamas 5 taškais, o naujos sudėtingos mokėjimo sistemos sukūrimas – 20 taškų.

„Asana“ naudojimas IT komandoms:

1. Komandos įvertina užduotis ir paskirsto taškus.
2. Darbai planuojami pagal savaitinį arba „sprinto“ pajėgumą.
3. Kiekvienas komandos narys gali atlikti užduotis už tam tikrą taškų skaičių per dieną.
4. Vadovai naudoja bendrą surinktų taškų per savaitę skaičių, planuodami ateities projektus.

Užduotys

1 užduotis

Dizaineris Mantas per 6 valandas gali paruošti 30 „Asana“ taškų vertės dizaino elementų. Jo kolegė Luka tą patį darbą gali padaryti per 4 valandas. Per kiek laiko jie dirbdami kartu sukurs visus dizaino elementus?

2 užduotis

Laura ir Tomas turi užbaigti 120 „Asana“ taškų vertės užduotį per darbo savaitę (5 darbo dienas). Laura gali atlikti užduotį per 6 dienas, o Tomas – per 4 dienas. Jei Laura ir Tomas dirbs kartu, ar spės atlikti užduotį per 3 dienas?

3 užduotis

Dvi įmonės komandos dirba su skirtingais projektais. Jų vidiniai pajėgumai yra tokie:

- **A komanda:** dirbdama su 300 „Asana“ taškų vertės projektu, gali atlikti jį per 12 dienų.
- **B komanda:** dirbdama su 240 „Asana“ taškų vertės projektu, gali atlikti jį per 10 dienų.

A komanda pradeda naują 300 „Asana“ taškų vertą projektą. Per kiek dienų jis bus baigtas, jeigu po 5 dienų prie jo prisijungs ir B komanda? Pateikite atsakymą trijų reikšminių skaitmenų tikslumu.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Mantas per 6 val. sukuria 30 „Asana“ taškų vertės dizaino elementų, todėl jo darbo greitis yra: $30 : 6 = 5$ „Asana“ taškai per valandą.	1	Už teisingai apskaičiuotą Manto darbo greitį per valandą.
Luka per 4 val. sukuria 30 „Asana“ taškų vertės dizaino elementų, todėl jos darbo greitis yra: $30 : 4 = 7,5$ „Asana“ taško per valandą.	1	Už teisingai apskaičiuotą Lukos darbo greitį per valandą.
Kartu jų bendras darbo greitis yra: $5 + 7,5 = 12,5$ „Asana“ taško per valandą.	1	Už teisingai apskaičiuotą Manto ir Lukos bendro darbo greitį per valandą.
Laikas = $30 : 12,5 = 2,4$ valandos. Ats.: 2,4 valandos.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
Laura per 6 dienas atlieka užduotį už 120 „Asana“ taškų, todėl jos darbo greitis yra: $120 : 6 = 20$ „Asana“ taškų per dieną.	1	Už teisingai apskaičiuotą Lauros darbo greitį per dieną.
Tomas per 4 dienas atlieka užduotį už 120 „Asana“ taškų, todėl jo darbo greitis yra: $120 : 4 = 30$ „Asana“ taškų per dieną.	1	Už teisingai apskaičiuotą Tomo darbo greitį per dieną.
Kartu jų darbo greitis yra: $20 + 30 = 50$ „Asana“ taškų per dieną.	1	Už teisingai apskaičiuotą Lauros ir Tomo bendro darbo greitį per dieną.
Per 3 dienas jie atliks užduotį už: $50 \cdot 3 = 150$ „Asana“ taškų.	1	Už teisingą apskaičiavimą, kiek taškų Laura ir Tomas gaus per 3 dienas.
150 yra daugiau už 120, todėl, jei dirbs kartu, Laura ir Tomas spės atlikti užduotį per 3 dienas. Ats.: taip, jie spės.	1	Už padarytą teisingą išvadą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
A komanda: 300 „Asana“ taškų : 12 dienų = 25 „Asana“ taškai per dieną.	1	Už teisingai apskaičiuotą A komandos darbo greitį per dieną.
B komanda: 240 „Asana“ taškų : 10 dienų = 24 „Asana“ taškai per dieną.	1	Už teisingai apskaičiuotą B komandos darbo greitį per dieną.
Apskaičiuojame, kiek „Asana“ taškų pelnys A komanda per pirmas 5 dienas:	1	Už teisingai apskaičiuotą taškų skaičių per pirmas 5 dienas.

25 · 5 = 125 „Asana“ taškai.		
Apskaičiuojame, kiek dienų komandoms reikės, kad užbaigtų projektą ir surinktų likusius 175 „Asana“ taškus: 175 : 49 = 3,57 dienos.	1	<i>Už teisingą apskaičiavimą, per kiek dienų bus surinkti likusieji „Asana“ taškai.</i>
Prie gauto dydžio turime pridėti 5 dienas, kurias A komanda dirbo viena: 3,57 + 5 = 8,57. Ats.: 8,57 dienos.	1	<i>Už gautą teisingą atsakymą.</i>

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite Manto darbo greitį per valandą – padalykite jo gautų „Asana“ taškų skaičių iš laiko, per kurį taškai buvo gauti. Taip pat apskaičiuokite Lukos darbo greitį per valandą.

2 užuomina. Sudėkite gautus dydžius ir gausite Manto ir Lukos bendro darbo greitį.

3 užuomina. Padalykite 30 „Asana“ taškų iš bendro Manto ir Lukos darbo greičio ir gausite laiką, per kurį jie įvykdys užduotį, jei dirbs kartu.

2 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite Lauros darbo greitį per dieną – padalykite jos gautų „Asana“ taškų skaičių iš laiko, per kurį taškai buvo gauti. Taip pat apskaičiuokite ir Tomo atliekamo darbo per dieną greitį.

2 užuomina. Sudėkite gautus dydžius ir gausite jų bendro darbo greitį. Apskaičiuokite, kiek taškų bus vertas jų darbas, jei jie dirbs kartu tris dienas. Ar gautas skaičius didesnis nei 120? Pagal tai padarykite išvadą, ar Laura ir Tomas spės atlikti užduotį.

3 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite A komandos darbo greitį per dieną – padalykite jos gautų „Asana“ taškų skaičių iš laiko, per kurį taškai buvo gauti. Taip pat apskaičiuokite ir B komandos darbo greitį.

2 užuomina. Apskaičiuokite, kiek taškų A komanda gauna per pirmas penkias dienas, dirbdama viena. Tada – kiek taškų dar liko, kad užduotis būtų atlikta iki galo. Jei žinosite abiejų komandų bendro darbo greitį, galėsite apskaičiuoti, per kiek dienų bus įveiktas likęs darbas. Nepamirškite, kad galutinį atsakymą gausite, kai prie šio dydžio pridėsite 5 valandas, kurias A komanda dirbo viena.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Modeliai ir sąryšiai	Algebra	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	4
2			Algebra	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	5
3			Algebra	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	5

Mūro dėsnis

Bendroji įvestis

Prieš 50 metų kompiuteriai buvo milžiniški, užėmė ištisas patalpas, o jų galia buvo gerokai mažesnė nei dabartinių išmaniųjų telefonų. Žiūrint istoriškai, technologijų pažanga vyko pagal tam tikrą dėsninę sąlygą.

1965 metais Gordonas Mūras, vienas iš bendrovės „Intel“ įkūrėjų, atkreipė dėmesį, kad kompiuterių procesoriuose naudojamų tranzistorių skaičius kas dvejus metus padvigubėja. Taigi kompiuterių galia nuolat auga, o kaina mažėja. Šis reiškinys vadinamas Mūro dėsniu.

Pavyzdžiui, 1992 metais viename naujame kompiuteryje buvo apie 1 mln. tranzistorių, 1994 metais – apie 2 mln. tranzistorių, 1996 metais – apie 4 mln. tranzistorių ir t. t. Šis spartus augimas paaiškina, kodėl šiandien mūsų telefonai turi daugiau skaičiavimo galios nei pirmieji NASA kompiuteriai, padėję žmogui nusileisti Mėnulyje.

Taigi Mūro dėsnis – tai ne tik skaičių seka, bet ir realus pasaulio vystymosi modelis. Tačiau ar ši seka gali tęstis amžinai? Kada technologijų pažanga pasieks savo ribas? Tai klausimai, kurie domina ne tik matematikus, bet ir kitų sričių mokslininkus visame pasaulyje.

Užduotys

1 užduotis

Pagal Mūro dėsnį, kompiuteriuose esančių tranzistorių skaičius kas dvejus metus padvigubėja. Tarkime, kad 2010 metais viename naujame kompiuteryje vidutiniškai buvo 1 mlrd. tranzistorių. Vadovaujantis Mūro dėsniu, kiek tranzistorių buvo viename naujame kompiuteryje 2012 metais? Kiek 2016 metais?

2 užduotis

Mokslininkai pastebi, kad Mūro dėsnis lėtėja, nes mažinti tranzistorius darosi vis sudėtingiau. Sakykime, kad po 2030 metų tranzistorių skaičius dvigubės ne kas dvejus, o tik kas ketverius metus.

Manykime, kad 2030 metais viename naujame kompiuteryje bus 1 trln. tranzistorių ir toliau jų skaičius dvigubės kas ketverius metus. Užrašykite tranzistorių skaičiaus formulę $T(n)$ sveikiesiems neneigiamiems skaičiams n , kai T matuojamas trilijonais, $n = 0$ atitinka 2030 metus, $n = 1$ atitinka 2034 metus, $n = 2$ atitinka 2038 metus ir t. t.

Pagal šią formulę apskaičiuokite, koks bus tranzistorių skaičius 2070 metais.

3 užduotis

Tarkime, kad tranzistorių skaičius iš tikrųjų auga pagal Mūro dėsnį. Tačiau tranzistorių dydis yra ribotas – negalima jų pagaminti mažesnių už atomus (silicio atomo skersmuo – apie 0,2 nm).

Manykime, kad gaminant mažiausio įmanomo dydžio tranzistorius įprasto dydžio nešiojamajame kompiuteryje daugiausia jų gali tilpti 1600 mlrd. vienetų. Be to, 2026 metais viename tokiam kompiuteryje yra vidutiniškai 100 mlrd. tranzistorių, o tranzistorių skaičius dvigubėja kas dvejus metus.

Užrašykite tranzistorių skaičiaus formulę $T(n)$, kur T matuojamas milijardais, $n = 0$ atitinka 2026 metus, $n = 1$ atitinka 2028 metus, $n = 2$ atitinka 2030 metus ir t. t.

Pagal šią formulę apskaičiuokite, kuriais metais Mūro dėsnis pasieks savo ribą – tranzistorių skaičius nešiojamajame kompiuteryje pasieks 1600 mlrd. vienetų.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Iš sąlygos žinome, kad 2010 m. kompiuterio procesoriuje buvo 1 mlrd. tranzistorių, todėl 2012 m. kompiuterio procesoriuje buvo: $1 \cdot 2 = 2$ mlrd. tranzistorių. Ats.: 2012 m. buvo 2 mlrd. tranzistorių.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Vadovaujamės ta pačia seka ir apskaičiuojame, kad 2016 m. kompiuterio procesoriuje buvo: $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ mlrd. tranzistorių. Ats.: 2016 m. buvo 8 mlrd. tranzistorių.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Sudarome formulę tranzistorių skaičiui apskaičiuoti: $T(n) = 2^n$ trln. tranzistorių.	1	Už sudarytą teisingą tranzistorių skaičiaus formulę.
Kadangi nuo 2030 iki 2070 metų yra: $2070 - 2030 = 40$ metų, formulėje naudojame $n = 40 : 4 = 10$.	1	Už teisingai apskaičiuotą n reikšmę.
$T(10) = 2^{10} = 1024$ trln. tranzistorių. Ats.: 2070 m. bus 1024 trln. tranzistorių.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Sudarome formulę tranzistorių skaičiui apskaičiuoti: $T(n) = 100 \cdot 2^n$ mlrd. tranzistorių. ($n = 0$ atitinka 2026 metus)	1	Už sudarytą teisingą tranzistorių skaičiaus formulę.
Taigi gauname lygtį: $1600 = 100 \cdot 2^n$.	1	Už sudarytą teisingą lygtį.
Kadangi $16 = 2^n$, gauname $n = \log_2 16 = 4$.	1	Už gautą teisingą lygties sprendinį.
Todėl tai turėtų būti po $4 \cdot 2 = 8$ metų nuo 2026-ųjų. $2026 + 8 = 2034$ metais. Ats.: 2034 metais.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Taškai skiriami ir užduotį sprendžiant kitu būdu, kur $T(n) = 100 \cdot 2^{n/2}$ (čia n padidėja vienetu kas metus).		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Kiek metų praėjo nuo 2010 iki 2012 metų? Kiek kartų padidėja tranzistorių skaičius per tiek laiko?

2 užuomina. Už kiekvienus dvejus metus, kurie praėjo nuo 2010 metų, padauginkite tranzistorių skaičių iš 2. Jei praėjo 6 metai, padauginkite iš 2 tris kartus.

2 užduotis

1 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad n padidėjus vienetu, T padidėja dvigubai. Pagal tai užrašykite $T(n)$ formulę, jeigu $T(0) = 1$.

2 užuomina. Jei $n = 0$ atitinka 2030 metus ir praėjus 4 metams n padidėja vienetu, tuomet kam bus lygus n , kai bus 2070 metai? Apskaičiuokite 2030 ir 2070 metų skirtumą. Padalykite šį skirtumą iš 4. Taip apskaičiuosite n reikšmę.

3 užuomina. Įsistatykite apskaičiuotą n reikšmę į sudarytą geometrinės progresijos $T(n)$ formulę ir apskaičiuokite rezultatą.

3 užduotis

1 užuomina. Sakykime, kad 2026 metai atitinka $n = 0$, taigi, $T(0) = 100 \text{ mlrd.}$ Sudarykite formulę tranzistorių skaičiui apskaičiuoti, jei kas 2 metus tranzistorių skaičius padvigubėja.

2 užuomina. Sudarykite lygtį, kurios vienoje pusėje maksimalus tranzistorių skaičius (1600), o kitoje pusėje – sudaryta tranzistorių skaičiaus formulė. Išspręskite šią lygtį ir apskaičiuokite, kuriais metais bus pasiektas maksimalus tranzistorių skaičius.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Modeliai ir sąryšiai	Dėsningumai	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Dėsningumai	<i>Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas</i>	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3
3			Dėsningumai	<i>Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas</i>	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	4

Kuro sąnaudos

Bendroji įvestis

Automobilio kuro sąnaudos (l/100 km) priklauso nuo greičio (v) kvadrato ir aprašomos funkcija:

$$f(v) = 0,0012v^2 - 0,168v + 11,38$$

Užduotys

1 užduotis

Kokios yra kuro sąnaudos važiuojant 50 km/h greičiu?

2 užduotis

Kokiu greičiu važiuojant kuro sąnaudos yra mažiausios?

3 užduotis

Nustatykite, koks turi būti greičio intervalas, kad kuro sąnaudos neviršytų 8 l/100 km. Atsakymą suapvalinkite iki vienetų.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	1	
$f(50) = 0,0012 \cdot 50^2 - 0,168 \cdot 50 + 11,38 = 0,0012 \cdot 2500 - 8,4 + 11,38 = 3,0 - 8,4 + 11,38 = 5,98 \text{ l/100 km}$ Ats.: 5,98 l/100 km važiuojant 50 km/h greičiu.	1	Už teisingą atsakymą
Pastaba		
Jei atsakymas suapvalinamas ir parašoma 6 l/100 km, taškas taip pat skiriamas.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Kadangi kuro sąnaudų funkciją apibūdina parabolė, kurios šakos nukreiptos aukštyn, tai minimali reikšmė yra parabolės viršūnė. Ji apskaičiuojama pagal formulę: $v = -\frac{b}{2a}$ Čia $a = 0,012$, $b = -0,168$ $v = -\frac{-0,168}{2 \cdot 0,0012} = \frac{0,168}{0,0024} = 70 \text{ km/h}$ Ats.: kuro sąnaudos mažiausios, važiuojant 70 km/h greičiu.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
	1	Už teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Sprendžiame nelygybę: $0,0012v^2 - 0,168v + 11,38 \leq 8$ $0,0012v^2 - 0,168v + 3,38 \leq 0$	1	Už teisingai sudarytą nelygybę.
Ieškome intervalų, kuriuose keičiasi ženklas: $0,0012v^2 - 0,168v + 3,38 = 0$ Diskriminantas: $D = (-0,168)^2 - 4 \cdot 0,0012 \cdot 3,38 = 0,0119808$ $\sqrt{D} \approx 0,1095$ Sprendiniai: $v_1 = \frac{0,168 - 0,1095}{0,0024} \approx \frac{0,0585}{0,0024} \approx 24 \text{ km/h}$ $v_2 = \frac{0,168 + 0,1095}{0,0024} \approx \frac{0,2775}{0,0024} \approx 116 \text{ km/h}$	1	Už rastus teisingus kvadratinės lygties sprendinius.
Kadangi parabolės šakos nukreiptos į viršų, tai tarp šių sprendinių sąnaudos ≤ 8 .	1	Už teisingą atsakymą

Ats.: greičio intervalas nuo 24 km/h iki 116 km/h.		
--	--	--

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Pagalvokite, kaip, žinant funkciją $f(v)$, galima apskaičiuoti automobilio kuro sąnaudas, kai duotas konkretus greitis.

2 užuomina. Įstatykite greičio duomenis į formulę ir apskaičiuokite.

2 užduotis

1 užuomina. Pagalvokite, kuriame taške kvadratinė funkcija turi minimalią reikšmę (tai – parabolė su šakomis, nukreiptomis į viršų).

2 užuomina. Viršūnės koordinačių formulė minimumo taškui: $v = -\frac{b}{2a}$.

3 užduotis

1 užuomina. Išanalizuokite funkcijos lygtį. Ką reiškia teiginys, kad kuro sąnaudos neviršija 8 l/100 km?

2 užuomina. Prisiminkite, kad sprendžiant nelygybę iš pradžių reikia išspręsti lygybę ir rasti taškus, kuriuose keičiasi ženklas.

3 užuomina. Parabolės, nusakančios kuro sąnaudas, šakos nukreiptos aukštyn, todėl dominantis intervalas yra tarp gautų kvadratinės lygties šaknų.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Modeliai ir sąryšiai	Algebra.	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Slenkstinis	1
2			Algebra.	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Patenkinamas	2
3			Algebra.	Matematinis problemų sprendimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Pagrindinis	3

Kurjeris

Bendroji įvestis

Dirbant kurjeriu (-e) siuntų išvežiojimo srityje, kai kurios įmonės siūlo nuo darbo rezultatų priklausantį atlyginimą.

Tokį atlyginimą sudaro dvi dalys: fiksuotas valandinis užmokestis ir papildomas priedas, kuris priklauso nuo pristatytų siuntų kiekio. Laikas matuojamas valandomis, o siuntų kiekis – vienetais.

Jeigu valandinis užmokestis yra A eurų per valandą, o priedo dydis už kiekvieną pristatytą siuntą yra B eurų, tuomet užmokestį M po t darbo valandų ir pristatčius x siuntų galima apskaičiuoti taip:

$$M = A \cdot t + B \cdot x.$$

Užduotys

1 užduotis

Tarkime, kad pristatote po tris siuntas per valandą.

Kiek siuntų pristatysite per 5 valandas?

Kiek siuntų pristatysite per t valandų? Išreikškite pristatomų siuntų skaičių x per valandų skaičių t .

2 užduotis

Kiek siuntų turėtumėte pristatyti per valandą, kad už siuntų pristatymą gaunamas priedas būtų didesnis nei valandinis atlyginimas? Atsakymą užrašykite su A ir B .

3 užduotis

Pirmąją dieną dirbote 8 valandas, pristatėte 15 siuntų ir uždirbote 70 eurų. Antrąją dieną dirbote 2 valandas, pristatėte 5 siuntas ir uždirbote 20 eurų.

Apskaičiuokite A ir B reikšmes.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Per 5 valandas bus pristatyta siuntų: $3 \cdot 5 = 15$.	1	Už teisingai apskaičiuotą siuntų skaičių per 5 valandas.
Per t valandų bus pristatyta siuntų: $x = 3 \cdot t$.	1	Už teisingai sudarytą funkciją $x(t)$.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Kadangi valandinis atlyginimas lygus A , o pristatus x siuntų gaunamas užmokestis lygus $B \cdot x$, gauname: $A < B \cdot x$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą sudaryti nelygybę.
Ats.: $x > \frac{A}{B}$ (kai $B \neq 0$).	1	Už gautą teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Kadangi valandinis užmokestis lygus A , o užmokestis už kiekvieną pristatytą siuntą lygus B , gauname tokią lygčių sistemą: $8 \cdot A + 15 \cdot B = 70$, $2 \cdot A + 5 \cdot B = 20$.	1	Už sudarytą teisingą lygčių sistemą.
Sprendžiame išreiškimo būdu: Iš vienos lygties išreiškiamas A arba B ir įstatomas į kitą lygtį. Pvz., iš antros lygties: $A = 1 - 2,5 \cdot B$, todėl $8 \cdot (1 - 2,5 \cdot B) + 15 \cdot B = 70$. Sprendžiame sudėties būdu: Teisingai parenkamas daugiklis vienai iš lygčių, kad susiprastintų A arba B . Pvz., antrąją lygtį padauginus iš -4 ir pridėjus prie pirmosios, gaunama: $8 \cdot A - 8 \cdot A + 15 \cdot B - 20 \cdot B = 70 - 80$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą taikyti išreiškimo arba sudėties būdą.
$A = 5$.	1	Už gautą teisingą A reikšmę.
$B = 2$.	1	Už gautą teisingą B reikšmę.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Jei penkis kartus pristatysite po tris siuntas, kiek siuntų pristatysite iš viso?

2 užuomina. Jei sudauginsite darbo valandų skaičių su pristatomų siuntų per valandą skaičiumi, gausite išraišką, kiek siuntų iš viso pristatyta per tą laiką.

2 užduotis

1 užuomina. Užrašykite valandinį atlyginimą, priedo dydį ir pagal sąlygą nustatykite, į kurią pusę turi būti nukreiptas nelygybės ženklas.

2 užuomina. Išspręskite nelygybę taip, kad gautumėte įvertį per valandą pristatomų siuntų skaičiui x . Atsakyme turi būti A ir B.

3 užduotis

1 užuomina. Sudarykite dviejų tiesinių lygčių sistemą. Pirmoje lygtyje per A, B, t ir x išreikškite, kiek buvo uždirbta pirmąją dieną. Antrąją lygtimi išreikškite antrosios dienos uždarbį. Turėjote gauti lygčių sistemą, kurioje yra du nežinomieji A ir B, o kiti dydžiai žinomi.

2 užuomina. Gautą lygčių sistemą galite spręsti išreiškimo būdu: iš vienos lygties išreikškite kurį nors nežinomąjį (A arba B) ir įsistatykite į kitą lygtį. Taip apskaičiuosite A ir B reikšmes. Jei sistemą spręsite sudėties būdu, pagalvokite, iš kokio skaičiaus reikėtų padauginti vieną ar kitą lygtį, kad jas sudėjus išnyktų vienas iš nežinomųjų – A arba B.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Modeliai ir sąryšiai	Algebra: lygčių sistemos	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Slenkstinis	2
2			Algebra: lygčių sistemos	Matematinis komunikavimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	2
3			Algebra: lygčių sistemos	Loginis mąstymas ir įrodymai	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	4

1o (GIMANZIJS II) KLASĖ, GEOMETRIJA IR MATAVIMAI

Teodolitas

Bendroji įvestis

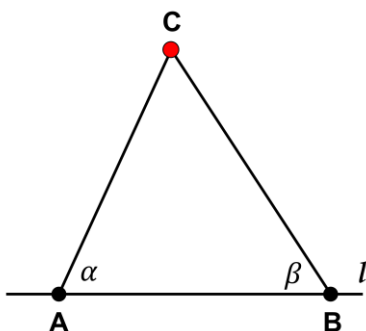
Ar teko matyti statybose naudojamą kampų matavimo prietaisą? Jis primena mažą kamerą, dažniausiai pastatomą ant trijų kojų. Šis prietaisas vadinamas teodolitu ir suteikia galimybę tiksliai išmatuoti kampus tiek horizontalioje, tiek vertikalioje plokštumoje.



Šaltinis: [Shutterstock](#), ID: 246908816.

Naudojantis teodolitu, galima nustatyti įvairius stebimų objektų duomenis – jų aukštį, atstumą iki jų ir kitus matmenis.

Tarkime, matavimams pasirenkami du taškai A ir B, esantys tiesėje l . Matuojant objektą C teodolitu gaunami kampų α ir β didumai:

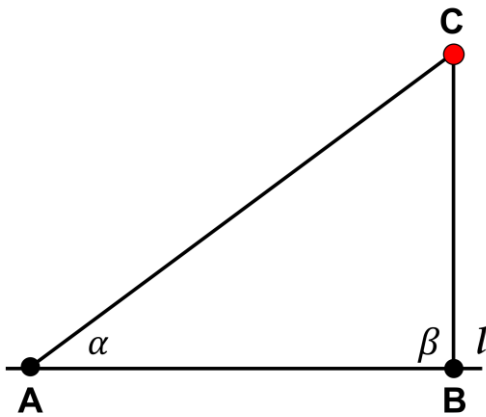


Žinant kampų α ir β didumus bei atstumą AB, iš šios informacijos galima nustatyti visus kitus trikampio ABC elementus.

Užduotys

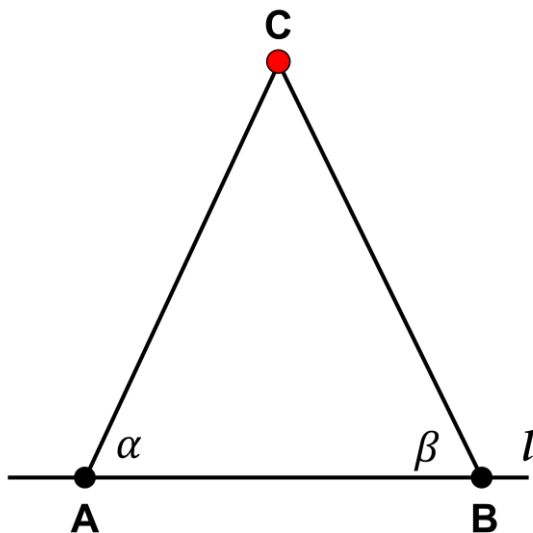
1 užduotis

Taškai B ir C sujungti tiesia virve. Matuojant taške A, nustatyta, kad kampas $\alpha = 30^\circ$, o matuojant taške B – kad kampas $\beta = 90^\circ$. Apskaičiuokite virvės BC ilgį, jei atstumas tarp taškų A ir B yra 9 metrai. Atsakymą pateikite metrais trijų reikšminių skaitmenų tikslumu.



2 užduotis

Atliekant skaičiavimus nustatyta, kad $\alpha = \beta = 15^\circ$, o atstumas AB yra 5 metrai. Apskaičiuokite, atstumą AC. Atsakymą pateikite metrais trijų reikšminių skaitmenų tikslumu.



Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Pagal Pitagoro teoremą: $AC^2 = AB^2 + BC^2$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą taikyti Pitagoro teoremą.
Pagal stačiojo trikampio statinio prieš 30° kampą savybę: $AC = 2 \cdot BC$	1	Už pritaiktą stačiojo trikampio statinio prieš 30° kampą savybę.
Sutraukiame panašiuosius narius ir gauname: $3 \cdot BC^2 = 9^2$	1	Už gautą lygtį BC ilgiui rasti.
Išsprendžiame lygtį: $BC = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 5,20 \text{ m.}$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
Kraštinės AC ir BC yra lygios (pvz., pagal sinusų teoremą).	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą nustatyti, kad kraštinės AC ir BC yra lygios.
Apskaičiuojame kampo ACB didumą: $\angle ACB = 180^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 150^\circ$.	1	Už teisingai apskaičiuotą $\angle ACB$ didumą.
Pritaikome kosinusų teoremą ir gauname: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB$ arba $5^2 = AC^2 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AC \cdot \cos 150^\circ$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą trikampiui taikyti kosinusų teoremą.
Sutraukiame panašiuosius narius: $AC^2(2 + \sqrt{3}) = 25$.	1	Už teisingą panašųjų narių sutraukimą.
Ats.: $AC \approx 2,59 \text{ m.}$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Duotam trikampiui pritaikykite Pitagoro teoremą.

2 užuomina. Kokią savybę apie stačiojo trikampio statinį prieš 30° kampą žinote? Pritaikykite šią savybę ir išreikškite BC per AC. Įsistatykite šią išraišką į Pitagoro teoremos formulę.

3 užuomina. Išspręskite gautą lygtį ir apskaičiuokite BC ilgį. Atkreipkite dėmesį, kad atsakymą reikia pateikti trijų reikšminių skaitmenų tikslumu.

2 užduotis

1 užuomina. Ką galite pasakyti apie kraštinių AC ir BC ilgius (jei, tarkime, pritaikysite sinusų teoremą)?

2 užuomina. Duotam trikampiui pritaikykite kosinusų teoremą. Apskaičiuokite kampo ACB didumą ir išspręskite gautą lygtį AC ilgiui apskaičiuoti. Atkreipkite dėmesį, kad atsakymą turite pateikti trijų reikšminių skaitmenų tikslumu.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Geometrija ir matavimai	Figūros	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	4
2			Figūros	Loginis mąstymas ir įrodymai	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	5

Auksinė pentagrama

Bendroji įvestis

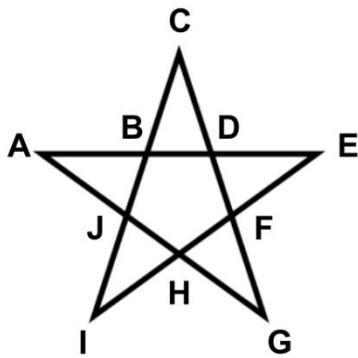
Matematikams nuo seno traukė įdomi geometrinė figūra pentagrama, dar vadinama penkiakampe žvaigžde. Pateikiame du jos apibrėžimus.

1 apibrėžimas. Pentagrama yra figūra, gaunama pratęsus taiskyklingojo penkiakampio kraštines taip, kad išeitų taiskyklingoji penkiakampė žvaigždė (pavaizduota paveiksle).

2 apibrėžimas. Pentagrama yra figūra, turinti 10 taškų – 5 vidinius ir 5 išorinius. 5 vidiniai kampai sudaro taiskyklingąjį penkiakampį, o 5 išoriniai taškai sudaro taiskyklingąją žvaigždę (pavaizduota paveiksle).

Įdomus faktas. Pentagramoje aukso pjūvį galima rasti net keliose vietose!

Pentagramos taškus pažymime, kaip pavaizduota paveiksle:



Figūros viduje – taiskyklingasis penkiakampis (brėžinyje – BDFHJ), o jos išoriniai kampai lygūs 36° (pavyzdžiui, $\angle BCD$).

Be to, žinoma, kad bet kokio dydžio pentagramoje atkarpų BD ir DE ilgių santykis yra $3 - \sqrt{5} : \sqrt{5} - 1$. Vadovaukitės šiuo santykiu ir išspręskite toliau pateiktas užduotis.

Užduotys

1 užduotis

Apskaičiuokite, kam lygus kampo AHE didumas.

2 užduotis

Įrodykite, kad santykis $\frac{AE}{BE}$ lygus aukso pjūviui, t. y. $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

3 uždutis

Išnagrinėkite trikampį BCD ir įrodykite, kad santykis $\frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ}$ lygus aukso pjūviui, t. y. $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Galite remtis 2 užduties informacija, kad santykis $\frac{AE}{BE}$ lygus aukso pjūviui.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Trikampio AHE kampų suma lygi 180° : $180^\circ = \angle HAE + \angle AEH + \angle AHE$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą taikyti trikampio kampų sumos arba taisyklingojo penkiakampio kampų sumos formulę.
Todėl $\angle AHE$ lygus: $180^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 108^\circ$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Galima taikyti ne tik trikampio kampų sumos, bet ir taisyklingojo penkiakampio kampų sumos formulę.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Iš sąlygos gauname, kad kraštinę AE galime išreikšti taip: $AE = BD + 2 \cdot AE$; arba $AE = (3 - \sqrt{5}) + 2(\sqrt{5} - 1)$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą AE išreikšti per žinomus dydžius.
Iš sąlygos gauname, kad kraštinę BE galime išreikšti taip: $BE = BD + AE$; arba $BE = 3 - \sqrt{5} + \sqrt{5} - 1$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą BE išreikšti per žinomus dydžius.
Todėl santykis $\frac{AE}{BE}$ yra: $\frac{AE}{BE} = \frac{(3-\sqrt{5})+2(\sqrt{5}-1)}{3-\sqrt{5}+\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ats.: įrodyta.	1	Už teisingą įrodymą, kad gautas reiškinys lygus sąlygoje duotajam.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
$\angle CBD$ didumas lygus: $\angle CBD = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$.	1	Už teisingai apskaičiuotą $\angle CBD$ didumą.
Taikome sinusų teoremą trikampiui AHE : $\frac{\sin 72^\circ}{CD} = \frac{\sin 36^\circ}{BD}$.	1	Už teisingai trikampiui AHE pritaiktą sinusų teoremą.
Įsistatome CD ir BD ilgius, pertvarkome lygybę ir gauname: $\frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}$.	1	Už santykio $\frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ}$ išreiškimą žinomais dydžiais.
Naikiname iracionalumą vardiklyje ir pertvarkome:	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą reiškinio vardiklio iracionalumui pašalinti.

$\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$		
Atliekame veiksmus, sutraukiame panašiuosius narius ir gauname, kad reiškinys atitinka sąlygoje duotąjį: $\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}+2}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$ Ats.: įrodyta.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Kam lygi trikampio AHE kampų suma?

2 užuomina. Apskaičiuokite kampo AHE didumą. Remkitės tuo, kad trikampio kampų suma lygi 180° ir yra žinomi du trikampio AHE kampai.

2 užduotis

1 užuomina. Išreikškite kraštinės AE ilgį per žinomus dydžius. Taip pat per žinomus dydžius užrašykite ir kraštinės BE ilgį.

2 užuomina. Sutraukite panašiuosius narius AE ir BE išraiškose, parodykite, kad jų ilgių santykis lygus aukso pjūviui, kuris pateiktas sąlygoje.

3 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite kampo CBD didumą ir pritaikykite sinusų teoremą trikampiui CBD.

2 užuomina. Iš sinusų teoremos išreikškite, kam lygus santykis $\frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ}$. Panaikinkite gauto reiškinio vardiklyje esantį iracionalumą.

3 užuomina. Kai panaikinsite gauto reiškinio vardiklio iracionalumą, atlikite veiksmus ir sutraukite panašiuosius narius. Parodykite, kad gautas reiškinys lygus aukso pjūviui, kuris pateiktas sąlygoje.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Geometrija ir matavimai	Figūros	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Figūros	Loginis mąstymas ir įrodymai	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Pagrindinis	3
3			Figūros	Loginis mąstymas ir įrodymai	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	5

Paklaidos geodeziniuose matavimuose

Bendroji įvestis

Geodezija – tai mokslas, tiriantis su Žemės paviršiumi susijusius matavimus, kuriais grindžiami statybų, infrastruktūros ir žemėtvarkos projektai. Geodezinių matavimų duomenys naudojami nustatant sklypų ribas, projektuojant kelius, tiltus ir kitus inžinerinius statinius. Tačiau jokie matavimai nėra visiškai tikslūs – net ir pažangiausių prietaisų matavimai būna su paklaida, kuri gali turėti didelę įtaką galutiniam rezultatui.

Matavimo paklaidos gali atsirasti dėl prietaisų netikslumo, aplinkos veiksnių ar žmogiškųjų klaidų. Vienas svarbiausių geodezijos uždavinių – minimizuoti paklaidą ir įvertinti, kaip ji veikia galutinį rezultatą. Pavyzdžiui, matuojant trikampio formos sklypą, kiekvienas netiksliai nustatytas kampas ar kraštinė gali lemti reikšmingus žemės ploto skirtumus.

Siekiant įvertinti galimą matavimo paklaidą, dydžiai rašomi su $\pm$ reikšme. Pavyzdžiui, užrašas $A = 10^\circ \pm 1^\circ$ reiškia, kad A reikšmė yra iš intervalo $[9^\circ; 11^\circ]$.

Užduotys

1 užduotis

Geodezininkas išmatavo trikampio formos sklypą ir dviejų kampų didumą apskaičiavo su paklaida: $A = 58^\circ \pm 1^\circ$ ir $B = 47^\circ \pm 1^\circ$. Atsižvelkite į matavimo paklaidą ir nustatykite galimą mažiausią ir didžiausią kampo C reikšmę.

2 užduotis

Trikampio formos sklypo kraštinė BC yra tiksliai išmatuota ir lygi 120 m. Kampai A ir B išmatuoti su paklaida: $A = 62^\circ \pm 1^\circ$, $B = 54^\circ \pm 1^\circ$. Remkitės šiais dydžiais ir įvertinkite, koks gali būti didžiausias ir mažiausias kraštinės AC ilgis. Atsakymus pateikite metrais ir suapvalinkite iki sveikojo skaičiaus.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Kampo C mažiausia galima reikšmė: $180^\circ - 59^\circ - 48^\circ = 73^\circ$.	1	Už gautą teisingą atsakymą (kampo C mažiausią reikšmę).
Kampo C didžiausia galima reikšmė: $180^\circ - 57^\circ - 46^\circ = 77^\circ$.	1	Už gautą teisingą atsakymą (kampo C didžiausią reikšmę).
Pastabos		
Taip pat tinkantys atsakymai: $75^\circ \pm 2$; $[73, 77]$.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Pritaikykime sinusų teoremą trikampiui ABC ir gausime: $\frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{BC}{\sin \angle A}$ arba $AC = \frac{BC}{\sin \angle A} \cdot \sin \angle B.$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (sinusų teoremos pritaikymą).
Didžiausia AC reikšmė bus tuomet, kai $\sin \angle B$ reikšmė didžiausia, o $\sin \angle A$ reikšmė mažiausia: $AC = \frac{120}{\sin 53^\circ} \cdot \sin 63^\circ \approx 133,88 \approx 134 \text{ (m)}.$	1	Už apskaičiuotą didžiausią AC reikšmę.
Mažiausia AC reikšmė bus tuomet, kai $\sin \angle B$ reikšmė mažiausia, o $\sin \angle A$ reikšmė didžiausia: $AC = \frac{120}{\sin 55^\circ} \cdot \sin 61^\circ \approx 128,13 \approx 128 \text{ (m)}.$	1	Už apskaičiuotą mažiausią AC reikšmę.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite, kad trikampio visų kampų suma lygi 180° . Pagal tai užrašykite lygtį kampui C rasti iš kampų A ir B.

2 užuomina. Apskaičiuokite, koks turėtų būti kampų A ir B didumas, kad kampas C įgytų mažiausią ir didžiausią reikšmes.

2 užduotis

1 užuomina. Pritaikykite sinusų teoremą kampams A ir B ir išreikškite, kam lygus AC ilgis.

2 užuomina. Apskaičiuokite, koks turėtų būti kampų A ir B didumas, kad AC įgytų didžiausią ir mažiausią reikšmes. Prisiminkite, kad $\sin x$ reikšmė didėja, kai $x \in (0, 90^\circ)$, todėl šiame intervale galioja taisyklė: kuo didesnė x reikšmė, tuo didesnė ir $\sin x$ reikšmė.

3 užuomina. Apskaičiuokite didžiausią ir mažiausią AC ilgį, pateikite juos metrais ir suapvalinkite iki sveikojo skaičiaus.

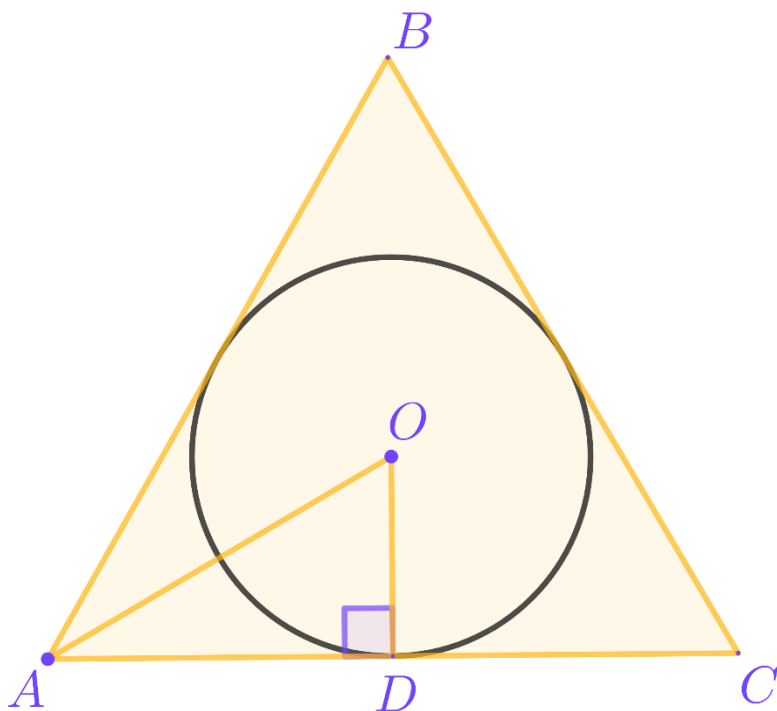
Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Geometrija ir matavimai	Figūros	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Figūros	Loginis mąstymas ir įrodymai	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Pagrindinis	3

Fontano kanalų ilgis

Bendroji įvestis

Inžinieriai planuoja trikampio formos aikštėje įrengti apskritimo formos fontaną, kaip pavaizduota schemeje.



Užduotys

1 užduotis

Tarkime, kad trikampio viršūnių koordinatės yra: $A(0; 0)$, $B(3; 5)$, $C(6; 0)$. Nustatykite, ar trikampis ABC lygiašonis, lygiakraštis, ar įvairiakraštis. Atsakymą pagrįskite skaičiavimais.

2 užduotis

Fontano dugne įrengti 3 kanalai, einantys statmenai nuo trikampio kraštinių iki fontano centro (pvz., atkarpa DO schemeje). Koks bus visų 3 kanalų bendras ilgis, jei trikampio kraštinių ilgiai yra 13, 14 ir 15 m, o trikampio plotas – 84 m²?

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Pagal atstumo tarp dviejų taškų formulę kraštinės AB ilgis: $AB = \sqrt{(3 - 0)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{34}$.	1	Už gautą teisingą AB ilgį.
Pagal atstumo tarp dviejų taškų formulę kraštinės AC ilgis: $AC = \sqrt{(6 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 6$.	1	Už gautą teisingą AC ilgį.
Pagal atstumo tarp dviejų taškų formulę kraštinės BC ilgis: $BC = \sqrt{(6 - 3)^2 + (0 - 5)^2} = \sqrt{34}$.	1	Už gautą teisingą BC ilgį.
Ats.: trikampis ABC yra lygiašonis.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Įbrėžtinio apskritimo spindulys apskaičiuojamas pagal formulę: $r = \frac{S}{p}$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Įsistatome sąlygoje pateiktus skaičius ir gauname: $r = \frac{84}{0,5(13 + 14 + 15)} = 4 \text{ m.}$	1	Už gautą teisingą spindulio ilgį.
Tokie vidiniai kanalai bus 3, todėl bendras kanalų ilgis: $3 \cdot 4 = 12 \text{ m.}$ Ats.: 12 m.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite atstumo tarp dviejų taškų formulę. Kokius gautumėte trikampio kraštinių ilgius, jei ją pritaikytumėte?

2 užuomina. Pritaikykite atstumo tarp dviejų taškų formulę taškams A, B ir C, kad apskaičiuotumėte 3 kraštinių AB, AC ir BC ilgius. Nustatykite, kiek iš gautų dydžių tarpusavyje sutampa. Pagal tai padarykite išvadą apie trikampio ABC rūšį.

2 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite, kokia formule galite remtis, kad apskaičiuotumėte į trikampį įbrėžto apskritimo spindulį. Atkreipkite dėmesį, kad spindulys atitinka vieno tokio kanalo ilgį.

2 užuomina. Pritaikykite formulę $r = \frac{S}{p}$, įsistatykite sąlygoje pateiktus dydžius ir apskaičiuokite įbrėžtinio apskritimo spindulį. Kiek tokio ilgio kanalų bus iki fontano centro? Sudėkite jų ilgius ir rasite bendrą kanalų ilgį.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Geometrija ir matavimai	Figūros	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	4
2			Figūros	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3

Dronai ir archeologai

Bendroji įvestis

Dronai – tai modernūs bepiločiai orlaiviai, naudojami įvairiose srityse: nuo fotografijos ir žemėtvarkos iki gelbėjimo operacijų ir geologijos. Jie padeda greitai ir efektyviai rinkti duomenis sunkiai pasiekiamose vietovėse. Vis dažniau juos pasitelkia ir archeologai, ieškodami senovinių struktūrų ar kurdami specialius, archeologijos poreikiams pritaikytus topografinius žemėlapius.

Užduotys

1 užduotis

Archeologas naudoja droną potencialiai kasinėjimų vietai skenuoti. Dronas skrenda 100 m aukštyje virš horizontalios plokštumos ir 35° kampu skenuoja plokštumoje esantį objektą. Kokiu atstumu nuo į plokštumą nuleisto statmens pagrindo yra šis objektas? Atsakymą suapvalinkite iki sveikojo skaičiaus ir pateikite metrais.

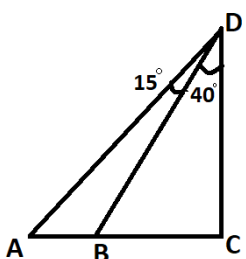
2 užduotis

Archeologė aptiko smėlio užpustytą struktūrą. Norėdama nustatyti jos ilgį, ji naudoja dronu, kuris skrieja 150 m aukštyje. Dronas fiksuoja struktūros pradžių 40° kampu ir pabaigą 55° kampu. Abu taškai yra toje pačioje drono pusėje ir vienoje žemės paviršiui statmenoje plokštumoje su dronu.

Nubrėžkite brėžinį. Apskaičiuokite skenuojamos struktūros ilgį. Atsakymą suapvalinkite iki sveikojo skaičiaus ir pateikite metrais.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Atstumą tarp drono ir objekto pasižymime x. Pritaikome stačiojo trikampio kampo kosinuso savybę ir gauname: $\cos 35^\circ = \frac{100}{x}$ arba $x = \frac{100}{\cos 35^\circ}$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą taikyti stačiojo trikampio 35° kampo kosinuso arba 55° kampo sinuso savybę.
Skaičiuotuvu apskaičiuojame x reikšmę: $x = \frac{100}{\cos 35^\circ} \approx 122 \text{ m.}$ Ats.: 122 metrai.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Nubraižome brėžinį: turime du taškus A ir B su skenavimo kampais nuo taško D viršuje (drono). Taškas C – drono projekcijos taškas ant žemės paviršiaus. 	1	Už sudarytą teisingą brėžinį.
Apskaičiuojame BC: $BC = DC \cdot \operatorname{tg}(40^\circ) \approx 150 \cdot 0,8391 \approx 125,865 \approx 126 \text{ m.}$	1	Už teisingai apskaičiuotą BC ilgį (atstumą tarp objekto pradžios ir statmens nuo taško D į plokštumą).
Apskaičiuojame AC: $AC = DC \cdot \operatorname{tg}(55^\circ) \approx 150 \cdot 1,428 \approx 214,2 \approx 214 \text{ m.}$	1	Už teisingai apskaičiuotą AC ilgį (atstumą tarp objekto pabaigos ir statmens nuo taško D į plokštumą).
Apskaičiuojame AB: $AB = AC - BC = 214 - 126 = 88 \text{ m.}$ Ats.: 88 metrai.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Nubraižykite brėžinį, kuriame pažymėkite drono aukščio, žemės paviršiaus ir skenuojamo objekto duomenis. Atkreipkite dėmesį – kokį trikampį gaunate?

2 užuomina. Pritaikykite šiam trikampiui kampo kosinuso savybę ir užrašykite lygtį. Skaičiuotuvu apskaičiuokite kosinuso reikšmę. Kai išspręsite lygtį, nepamirškite atsakymo suapvalinti iki sveikojo skaičiaus ir nurodyti matavimo vienetų.

2 užduotis

1 užuomina. Nubraižykite brėžinį, kuriame pažymėkite drono aukščio, žemės paviršiaus ir skenuojamo objekto duomenis. Atkreipkite dėmesį – kokį trikampį gaunate?

2 užuomina. Apskaičiuokite, koku atstumu nuo drono projekcijos yra nutolusi objekto pradžia ir pabaiga. Kad tai padarytumėte, dviem iš gautų trikampių pritaikykite kampo tangento savybę. Raskite gautų dydžių skirtumą. Nepamirškite atsakymo suapvalinti iki sveikojo skaičiaus ir nurodyti matavimo vienetų.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Geometrija ir matavimai	Figūros	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Figūros	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	4

Periodinių judėjimų modeliavimas kompiuteriniuose žaidimuose

Bendroji įvestis

Kuriant kompiuterinius žaidimus, dažnai naudojami matematikos ir fizikos dėsniai. Vienas iš svarbių principų yra sinusoidės formos grafikus turinčios funkcijos (sinusai, kosinusai), kurios leidžia modeliuoti bangavimą, svyravimus ir kitus periodinius judėjimus. Tokie judesiai matomi gamtoje (pvz., jūros bangos, švytuoklės svyravimai) ir naudojami įvairiose animacijose, pvz., vaizduojant plazdančias vėliavas, banguojantį vandenį ar aukštyn ir žemyn plaukiančias žuvis.

Užduotys

1 užduotis

Žaidimo kūrėjai pastebėjo, kad jų sukurtas veikėjas, šokdamas per kliūtį, kartais pašoka taip aukštai, kad būna nematomas ekrane. Šuolio aukštis aprašomas funkcija:

$$y(t) = 3 + 5 \sin t,$$

kur y – veikėjo šuolio aukštis metrais, o t – laikas sekundėmis. Į kokį didžiausią aukštį pakylą veikėjas šuolio metu?

2 užduotis

Kompiuteriniame žaidime sukurtas portalas, kurio plotis priklauso nuo paros meto. Portalo plotis w laiko momentu t yra lygus:

$$w(t) = 4 + 3\cos(4t),$$

čia t – laikas valandomis.

Kiekvieną vidurnaktį, kai $t=0$, portalo plotis yra didžiausias. Apskaičiuokite, po kiek laiko portalo plotis pasieks savo mažiausią reikšmę (pirmąjį kartą tą parą)? Skaičiuokite kosinuso argumentą radianais ir naudokite apytikslę reikšmę $\pi \approx 3,14$.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Didžiausia galima sinuso reikšmė yra vienetas, todėl atsakymui rasti naudojame $\sin t = 1$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (maksimalios sinuso reikšmės nustatymą).
Didžiausias aukštis šuolio metu lygus: $y = 3 + 5 = 8$. Ats.: 8 metrai.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Mažiausia kosinuso reikšmė bus pasiekta prie kampo, lygaus π radianų (arba 180°).	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (nustatytą kampą, su kuriuo kosinusas įgyja minimalią reikšmę).
Kadangi į portalo plotį įeina narys $\cos(4t)$, gauname lygtį: $4t = \pi$.	1	Už sudarytą teisingą lygtį.
Taigi, išsprendę lygtį gauname: $t = \frac{\pi}{4} \approx \frac{3,14}{4} = 0,785$. Ats.: 0,785 valandos.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Jeigu skaičiuojant t atsakymas nepaverčiamas radianais, paskutinis taškas neskiriamas.		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite, kokia didžiausia galima kampo sinuso reikšmė?

2 užuomina. Į formulę $y(t) = 3 + 5 \sin t$ įsistatykite didžiausią galimą sinuso $\sin t$ reikšmę ir pagal tai apskaičiuokite didžiausią galimą $y(t)$ reikšmę.

2 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite, kada kampo kosinusas įgyja mažiausią reikšmę? Kam tuomet lygus kosinuso argumentas? Nustatykite šį dydį radianais.

2 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad nagrinėjamo kosinuso argumentas yra $4t$. Sudarykite lygtį ir pagal ją apskaičiuokite, kam lygus t , kai kosinusas įgyja mažiausią reikšmę.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Geometrija ir matavimai	Figūros	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Figūros	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Aukštesnysis	3

1o (GIMANZIJS II) KLASĖ, DUOMENYS IR TIKIMYBĖS

Monetų indas

Bendroji įvestis

Ant stalo padėtas mažas indelis su monetomis. Vyksta žaidimas – kas atspės monetų skaičių indelyje, tas jas laimės.



[Šaltinis: Shutterstock, ID: 2487113155.](#)

Dešimties draugų, matematikos fakulteto studentų, grupė nusprendžia sudalyvauti šiame žaidime ir pateikia savo spėjimus. Kad būtų įdomiau ir spėjimai būtų labiau apgalvoti, žaidimo vedėjas po kiekvieno spėjimų rato surenka iš žaidėjų lapukus su jų spėjimais. Šiuos spėjimus vieną po kito suveda į specialią kompiuterinę programą ir savo kompiuterio ekrane realiuoju laiku visiems dalyviams rodo įvestų spėjimų duomenis bei apskaičiuotas įvairias jų statistines charakteristikas.

Užduotys

1 užduotis

Per pirmą spėjimų ratą vienas iš dešimties lapelių pasimetė – iš pradžių jo niekur nepavyko rasti, todėl statistiškai buvo apdoroti tik devynių spėjimų duomenys. Juose užrašytų spėjimų suma buvo 900. Tačiau po kurio laiko dingęs lapelis atsirado. Jame buvo įrašytas spėjimas 90.

Kam lygus visų dešimties spėjimų vidurkis?

2 užduotis

Apskaičiavus pirmų penkių spėjimų vidurkį, jis buvo lygus 80. Tačiau tuomet žaidimo vedėjas suprato, kad duomenis iš vieno lapelio įvedė neteisingai – dalyvis užrašė 99, o vedėjas suklydo ir įvedė 66.

Koks bus pirmų penkių spėjimų vidurkis ištaisius šią klaidą?

3 užduotis

Neretai skaičiuojant statistines charakteristikas dalis surinktų duomenų atmetama, nes jie yra fiziškai neįmanomi ir (arba) per daug iškraipo statistinius duomenis. Dažniausiai atmetami ekstremalūs duomenys, t. y. tokie, kurių skaitinės reikšmės didžiausios ir mažiausios. Pavyzdžiui, įsivaizduokite, kad vienas iš draugų užrašė spėjimą 0, kitas – 1000000, o likusių aštuonių spėjimų vidurkis lygus 125.

Argumentuokite: kodėl spėjimas 0 nėra realistiškas? Kodėl spėjimas 1000000 nėra realistiškas?

Tarkime, kad šiuos spėjimus paliekame. Apskaičiuokite visų dešimties spėjimų vidurkį. Padarykite išvadą apie tai, kokį poveikį viena ekstremali reikšmė gali padaryti imties vidurkiui.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Nauja spėjimų suma: $900 + 90 = 990$.	1	Už teisingai apskaičiuotą visų 10 spėjimų sumą.
Naujas spėjimų vidurkis: $\frac{990}{10} = 99$. Ats.: 99.	1	Už teisingai apskaičiuotą visų 10 spėjimų vidurkį.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Nauja spėjimų suma: $5 \cdot 80 - (99 - 66) = 367$.	1	Už teisingai apskaičiuotą naują 5 spėjimų sumą.
Naujas spėjimų vidurkis: $\frac{367}{5} = 73,4$. Ats.: 73,4.	1	Už teisingai apskaičiuotą naują 5 spėjimų vidurkį.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Spėjimas 0 nėra realistiškas, nes inde yra monetų.	1	Už teisingą argumentavimą, kodėl 0 nėra realistiškas spėjimas.
Spėjimas 1000000 nėra realistiškas, nes mažame inde tiek monetų netilptų.	1	Už teisingą argumentavimą, kodėl 1000000 nėra realistiškas spėjimas.
10 spėjimų vidurkis: $\frac{8 \cdot 125 + 0 + 1000000}{10} = 100100$.	1	Už teisingai apskaičiuotą 10 spėjimų vidurkį.
Viena ekstremali reikšmė gali smarkiai paveikti / padidinti / pakeisti imties vidurkį.	1	Už teisingą išvadą.
Pastabos		
Dėmesio: viena ekstremali reikšmė nebūtinai paveikia modą ir medianą – šių statistinių dydžių paminėjimas argumentuojant taškų nesuteikia.		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite naują spėjimų sumą – prie esamos spėjimų sumos pridėkite dar vieną naują spėjimą.

2 užuomina. Apskaičiuokite naują spėjimų vidurkį – atnaujintą spėjimų sumą padalykite iš naujo spėjimų skaičiaus.

2 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite, kokia buvo penkių spėjimų suma prieš ištaisant klaidą – sudauginkite spėjimų vidurkį su spėjimų skaičiumi.

2 užuomina. Iš buvusios penkių spėjimų sumos atimkite spėjimą 99 ir pridėkite spėjimą 66.

3 užuomina. Spėjimų skaičius liko toks pat, todėl gautą atnaujintą spėjimų sumą padalykite iš 5 ir gausite atnaujintą spėjimų vidurkį.

3 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite užduoties sąlygą ir pagalvokite, kodėl monetų kiekiai 0 ir 1000000 šioje situacijoje yra neįtikėtini.

2 užuomina. Apskaičiuokite spėjimų vidurkį: visų pirma nustatykite 8 neatmestų spėjimų sumą ir prie jos pridėkite 2 pateiktas ekstremalias reikšmes. Tada gautą rezultatą padalykite iš spėjimų skaičiaus.

3 užuomina. Palyginkite 8 spėjimų vidurkį su visų 10 spėjimų vidurkiu. Kaip pasikeitė vidurkis pridėjus ekstremalias spėjimų reikšmes? Kokią išvadą iš to galima padaryti?

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Duomenys ir tikimybės	Duomenys ir jų interpretavimas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Duomenys ir jų interpretavimas	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	2
3			Duomenys ir jų interpretavimas	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	4

Miego trukmė

Bendroji įvestis

Trys draugai paatviravo, kiek vidutiniškai valandų miega per naktį. Pirmasis draugas – 6, antrasis – 7, o trečiasis – 8 valandas.

Nagrinėkime šiuos tris skaičius kaip statistinius duomenis: sakykime, kad turime imtį, kurios dydis yra $n = 3$. Imtį sudaro $x_1 = 6$, $x_2 = 7$, $x_3 = 8$.

Vienas iš dydžių, apibūdinančių imtį, yra dispersija. Dispersija atspindi labiausiai tikėtiną matavimo vertės nukrypimą nuo aritmetinio vidurkio. Dispersijos formulė:

$$D = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Čia $\bar{x}$ – imties aritmetinis vidurkis, apskaičiuojamas sudedant imties skaičius ir padalijant iš imties dydžio.

Užduotys

1 užduotis

Apskaičiuokite imties vidurkį ir medianą.

2 užduotis

Apskaičiuokite imties dispersiją. Paaiškinkite, ką šioje imtyje reiškia gautas dydis.

3 užduotis

Prie kiekvienos reikšmės x_1 , x_2 ir x_3 pridėkime po 2 valandas. Kaip pasikeis vidurkis? Kaip pasikeis dispersija?

Žodžiais suformuluokite išvadą apie tai, kokią įtaką šios imties dispersijai turi imties reikšmių padidinimas vienodu skaičiumi.

Įrodykite suformuluotą išvadą: apskaičiuokite, kaip pasikeis šios imties vidurkis ir dispersija, jeigu kiekvieną reikšmę padidinsime dydžiu c .

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Imties vidurkis lygus: $\frac{6+7+8}{3} = 7.$ Ats.: 7.	1	Už teisingai apskaičiuotą imties vidurkį.
Kadangi, mediana yra vidurinis skaičių imties skaičius, ji yra lygi 7. Ats.: 7.	1	Už teisingai nustatytą medianą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Į dispersijos formulę įsistatome skaičius $n = 3$ ir $\bar{x} = 7$: $D = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^3 (x_i - 7)^2.$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
$D = \frac{2}{3}.$	1	Už teisingai apskaičiuotą dispersiją.
Vidutinis imties reikšmės nuokrypis nuo vidurkio / nuo 7 yra lygus $\frac{2}{3}$.	1	Už teisingą paaiškinimą, ką reiškia gautas dydis.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	
Vidurkis padidės 2 vienetais, nes: vidurkis, pridėjus po 2 valandas: $\frac{6 + 2 + 7 + 2 + 8 + 2}{3} = 9$ pradinis vidurkis: $\frac{6+7+8}{3} = 7.$ Ats.: vidurkis padidės 2 vienetais ir bus 9.	1	Už teisingą atsakymą.
Dispersija išliks tokia pati, nes: dispersija, pridėjus po 2 valandas: $\frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^3 (x_i + 2 - 9)^2 = \frac{2}{3}$ pradinė dispersija: $\frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^3 (x_i - 7)^2 = \frac{2}{3}$ Ats.: dispersija išliks tokia pati ir bus $\frac{2}{3}$.	1	Už teisingą atsakymą.
Jei kiekvieną šios imties reikšmę padidinsime vienu skaičiumi, tai	1	Už teisingą išvadą.

nepadarys įtakos dispersijai / pasiskirstymui / nuokrypiui.		
Padidinus kiekvieną imties reikšmę dydžiu c, naujas vidurkis padidėja dydžiu c: $\frac{6 + c + 7 + c + 8 + c}{3} = 7 + c$ Ats.: $7 + c$.	1	<i>Už teisingai apskaičiuotą naują vidurkį.</i>
Padidinus kiekvieną imties reikšmę dydžiu c, nauja dispersija: $\frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^3 (x_i + c - 7 - c)^2 = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^3 (x_i - 7)^2$ Ats.: dispersija lieka tokia pati.	1	<i>Už teisingai apskaičiuotą naują dispersiją.</i>
Pastabos		
<i>Vertinamas tik teiginių teisingumas, jų įrodymas nėra vertinamas.</i>		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite, kaip apskaičiuojamas vidurkis – sudėkite turimas reikšmes ($6 + 7 + 8$) ir padalykite sumą iš jų kiekio (3).

2 užuomina. Prisiminkite, kam lygi mediana – tai pagal dydį vidurinė imties reikšmė. Kuri reikšmė iš duotų trijų yra vidurinė?

2 užduotis

1 užuomina. Į dispersijos formulę įsistatykite n (kiek reikšmių yra imtyje) ir vidurkį $\bar{x}$.

2 užuomina. Kad pritaikytumėte dispersijos formulę, turite su kiekviena imties reikšme apskaičiuoti skirtumą tarp reikšmės ir vidurkio, tada pakelti gautą dydį kvadratu. Kai gausite tris tokias reikšmes, apskaičiuokite jų vidurkį. Gautas rezultatas ir bus dispersija.

3 užuomina. Prisiminkite, ką nusako dispersija – ji rodo vidutinį imties reikšmių nuokrypį nuo vidurkio. Kam šiuo atveju lygus vidurkis? Kam lygi dispersija? Apibūdinkite žodžiais, kaip dispersija atspindi vidutinį atstumą nuo reikšmių 6, 7, 8 iki vidurkio.

3 užduotis

1 užuomina. Jei kiekvieną reikšmę padidiname vienodu skaičiumi, kiek vidutiniškai padidėja kiekviena reikšmė? Tai lygu vidurkio pokyčiui.

2 užuomina. Panagrinėkite narius, kurie įeina į dispersiją. Sumą sudaro $x_i - \bar{x}$ pavidalo nariai. Jeigu ir reikšmes x_i , ir vidurkį $\bar{x}$ padidinsite tuo pačiu dydžiu, ar nuo to pasikeičia skirtumas $x_i - \bar{x}$?

3 užuomina. Žodžiais suformuluokite išvadą apie tai, kaip kiekvienos reikšmės padidinimas vienodu skaičiumi paveikia dispersijos dydį.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Duomenys ir tikimybės	Duomenys ir jų interpretavimas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Duomenys ir jų interpretavimas	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3
3			Duomenys ir jų interpretavimas	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	Gilus supratimas ir argumentavimas	AMG	Aukštesnysis	5

Teiginių apie gimtadienius pagrindimas prieštaros būdu

Bendroji įvestis

Užduotyje nagrinėjamos situacijos, kai teiginius patogiu pagrįsti darant prielaidą, kad teiginys neteisingas, ir įrodant, kad ši prielaida negalima.

Pavyzdys. Atliekamas eksperimentas: 7 kartus paeiliui ridenamas standartinis šešiasienis žaidimo kauliukas ir po kiekvieno ridenimo užrašoma, kiek akučių iškrito. Reikia pagrįsti teiginį, kad, atliekant tokį eksperimentą, visada bent dviejų ridenimų baigtys sutaps, t. y. bent 2 kartus iškris tas pats akučių skaičius.

Įrodymas. Reikia įrodyti, kad, ridenant šešiasienį žaidimo kauliuką 7 kartus, visada bent dviejų ridenimų baigtys sutaps. Tarkime, kad ridenome kauliuką 7 kartus, ir kiekvieną kartą iškrito vis skirtingas akučių skaičius. Tai reiškia, kad, ridenant šešiasienį žaidimo kauliuką, mums pavyko fiksuoti 7 skirtingus akučių skaičius. Bet tai neįmanoma, nes ridenant šešiasienį žaidimo kauliuką gali atvirsti tik 6 skirtingos jo sienos, t. y. gali iškristi tik 6 skirtingi akučių skaičiai. Gauname prieštaravimą. Tai reiškia, kad mūsų prielaida buvo klaidinga – negali taip atsitikti, kad, 7 kartus ridenant šešiasienį žaidimo kauliuką, kiekvieną kartą iškristų vis skirtingas akučių skaičius. Darome išvadą: mūsų prielaidai priešingas teiginys, kad visada bent dviejų ridenimų baigtys sutaps, yra teisingas.

Užduotys

1 užduotis

Luko mėgstamos veiklos:

- kompiuteriniai žaidimai,
- važinėjimas dviračiu,
- 3D spausdinimas,
- skaitymas,
- muzikos klausymas,
- trumpi žygiai su draugais.

Jis nori sudaryti savo veiklų grafiką savaitės darbo dienoms, nuo pirmadienio iki penktadienio. Lukui svarbu, kad į grafiką būtų įrašytos visos jo mėgstamos veiklos, bet tą pačią dieną negali vykti daugiau nei viena veikla. Ar jam pavyks sudaryti tokį grafiką?

Pagrįskite savo atsakymą.

2 užduotis

Pagalvokite, ar jūsų klasėje yra tą patį mėnesį gimusių vaikų? Nurodykite, kiek mažiausiai mokinių turi būti klasėje, kad bent dviejų iš jų gimimo mėnesiai tikrai sutaptų.

Pagrįskite savo atsakymą.

3 užduotis

Įsivaizduokite, kad sąrašė pateikti tam tikro skaičiaus skirtingų žmonių duomenys apie gimimo datą. Kiek mažiausiai tame sąrašė turi būti žmonių, kad garantuotai bent 3 iš jų gimtadieniai būtų tą pačią **metų** dieną?

Pagrįskite savo atsakymą.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Lukui tokio veiklų grafiko sudaryti nepavyks.	1	Už pasirinktą teisingą atsakymą.
Tarkime, kad Lukui pavyko sudaryti grafiką ir paskirstyti visas 6 veiklas ne daugiau kaip po vieną per darbo dieną. Tada darbo dienų per savaitę būtų ne mažiau kaip $1 \times 6 = 6$. Gauname prieštaravimą, nes darbo dienų yra 5. Taigi prielaida buvo neteisinga. Vadinasi, teisingas priešingas teiginys – Lukui nepavyks sudaryti tokio grafiko.	1	Už teisingą argumentavimą.

2 užduoties vertinimas																				
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas																		
	3	Jrašomas bendras taškų skaičius, skiriamas už šį uždavinį																		
Bent dviejų klasiokų gimtadieniai yra tą patį mėnesį, jei klasiokų yra 13 ir daugiau.	1	Už teisingą atsakymą.																		
Įrodysime teiginį, jei klasėje yra ne mažiau nei 13 mokinių, tai tikrai atsiras du mokiniai, kurie yra gimę tą patį mėnesį. Tarkime, kad teisingas priešingas teiginys – klasėje yra ne mažiau kaip 13 mokinių, bet nėra tokių mokinių, kurie yra gimę tą patį mėnesį. Tada per metus yra ne mažiau kaip $1 \times 13 = 13$ skirtingų mėnesių. Gauname prieštaravimą, nes metuose yra 12 mėnesių. Taigi prielaida neteisinga, todėl jai teisingas priešingas teiginys – jei klasėje yra ne mažiau kaip 13 mokinių, tai tikrai atsiras du mokiniai, kurie yra gimę tą patį mėnesį.	1	Už teisingą teiginio, kad klasėje turi būti ne mažiau kaip 13 mokinių, argumentavimą.																		
Dabar įrodysime, jei klasėje yra tik 12 mokinių, gali būti, kad nebus mokinių, gimusių tą patį mėnesį. Pateiksime kontrapavyzdį. Pavyzdžiui, jei mokinių gimimo mėnesiai bus pasiskirstę taip, kaip parodyta lentelėje, mokinių, gimusių tą patį mėnesį, nebus. <table><tr><td>Mokinio Nr.</td><td>Gimimo mėnuo</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td></tr><tr><td>7</td><td>7</td></tr><tr><td>8</td><td>8</td></tr></table>	Mokinio Nr.	Gimimo mėnuo	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	1	Už įrodymą, kad klasės, kurioje yra tik 12 mokinių, gali neužtekti.
Mokinio Nr.	Gimimo mėnuo																			
1	1																			
2	2																			
3	3																			
4	4																			
5	5																			
6	6																			
7	7																			
8	8																			

9	9		
10	10		
11	11		
12	12		

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
Sąrašas turi būti bent $366 \cdot 2 + 1 = 733$ žmonės.	1	Už teisingą atsakymą.
Įrodysime teiginį, jei yra bent 733 žmonės, mažiausiai 3 iš jų gimtadieniai bus tą pačią metų dieną. Tarkime, kad teisingas priešingas teiginys: „Yra 733 žmonės, bet negalime tarp jų rasti 3 žmonių, kurių gimtadieniai būtų tą pačią dieną.“ Tada kiekvieną metų dieną yra ne daugiau nei 2 žmonių gimtadieniai, t. y. žmonių yra ne daugiau nei $2 \cdot 366$. Gavome prieštarą.	1	Už teisingą teiginio, kad yra bent 733 žmonės, pagrindimą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Pabandykite veiklas išskirstyti taip, kad kiekvieną dieną būtų tik viena veikla. Kas atsitinka?

2 užuomina. Pabandykite veiklas išskirstyti taip, kad būtų ir laisvų dienų be jokių veiklų. Kas atsitinka?

2 užduotis

1 užuomina. Jei klasėje būtų tik 12 mokinių, ar būtų galima juos paskirstyti taip, kad kiekvieną mėnesį būtų tik 1 mokinys, kuris švenčia gimtadienį?

2 užuomina. Išnagrinėkite situaciją, kai klasėje yra 13 mokinių ir daugiau.

3 užduotis

1 užuomina. Kiek daugiausia gali būti žmonių, kad jų gimtadienių dienos nesutaptų?

2 užuomina. Atkreipkite dėmesį, kad metai gali turėti 365 arba 366 dienas.

2 užuomina. Išnagrinėkite situaciją, kai grupėje yra $366 \cdot 2$ žmonės.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Duomenys ir tikimybės	Tikimybės ir interpretavimas	Matematinis problemų sprendimas	problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	2
2			Tikimybės ir interpretavimas	Matematinis problemų sprendimas	problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3
3			Tikimybės ir interpretavimas	Dėsningumų radimas ir matematinis modeliavimas	problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	2

Santuokų statistika 1

Bendroji įvestis

2022 metais Japonijos nacionalinio vėžio instituto mokslininkai paskelbė įdomaus tyrimo duomenis. Jie ištyrė apie 600 000 vyrų ir moterų iš įvairių Azijos šalių, siekdami nustatyti, ar santuoka turi įtakos mirtingumui. Mirtingumas buvo suprantamas kaip tikėtinas, kad žmogus mirs dėl ligos ar kitos nelaimės.

Mokslininkai apibendrino įvairias mirties priežastis ir nustatė, kad susituokusių žmonių mirtingumas yra vidutiniškai 15 % mažesnis, palyginti su vienišų žmonių mirtingumu. Tai reiškia, kad tirtose grupėse susituokę žmonės buvo mažiau linkę mirti dėl ligų ar nelaimingų atsitikimų.

Dar vienas įdomus rezultatas: nors santuoka mažina mirtingumą abiejų lyčių atstovams, tačiau susituokusių vyrų mirtingumas buvo gerokai mažesnis nei susituokusių moterų.

Užduotyse pateikiami supaprastinti tyrimo rezultatai.

Užduotys

1 užduotis

Tiriant mirtingumą dėl vienos konkrečios priežasties (dėl tam tikros ligos), nustatyta, kad susituokusių vyrų mirtingumas yra mažesnis 40 %, o susituokusių moterų – 20 %. Lyginta su vidutiniu vienišų asmenų mirtingumu.

Jei vyrų ir moterų skaičius tyrime buvo vienodas, koks šioje kategorijoje abiejų lyčių bendras vidutinis mirtingumo sumažėjimas gyvenant santuokoje?

2 užduotis

Toliau tirtus žmones tiesiog vadinsime *tiriamaisiais*. Nagrinėsime tik tyrimo metu buvusius santuokoje tiriamuosius. Sakykime, kad mieste A susituokusių tiriamųjų skaičius lygus 1000, mieste B – 2000, o mieste C – 3000 žmonių. Tarkime, kad mieste A tarp tiriamųjų esančių santuokoje mirtingumas už viso tyrimo kontrolinę grupę **buvo didesnis 5 %**. Mieste B nustatyta, kad esant santuokoje tiriamųjų mirtingumas buvo **mažesnis 13 %**. Mieste C apskaičiuota, kad tiriamųjų mirtingumas esant santuokoje buvo **mažesnis 20 %**.

Apskaičiuokite, koks buvo tiriamųjų, esančių santuokoje, bendras vidutinis mirtingumo pokytis (padidėjimas / sumažėjimas) trijuose miestuose.

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Sakykime, kad tyrime buvo N moterų ir N vyrų. Tada mirusiųjų tyrimo laikotarpiu asmenų skaičiaus šiose abiejose grupėse kartu, palyginti su kontroline grupe, sumažėjimas vienetais buvo: $\frac{N \cdot 40}{100} + \frac{N \cdot 20}{100} = 0,6 \cdot N.$ Procentinis sumažėjimas visoje tiriamųjų grupėje, palyginti su kontroline grupe, buvo: $\frac{0,6 \cdot N}{2 \cdot N} \times 100 = 30 \%$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (procentų skaičiavimo formulės taikymą).
Ats.: 30 %.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		
Jei remiamasi loginio svorio intuicija (pvz., nurodoma, kad vyrų ir moterų skaičius vienodas, todėl vidurkis lygus $(40 + 20) : 2 = 30$), toks sprendimas laikomas tinkamu ir skiriamas taškas.		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Apskaičiuokime, kiek daugiau / mažiau tiriamųjų (esančių santuokoje, palyginti su kontroline vienišų žmonių grupe) buvo visuose trijuose miestuose. Tokių tiriamųjų skaičius lygus: $1000 \frac{-5 \%}{100 \%} + 2000 \frac{13 \%}{100 \%} + 3000 \frac{20 \%}{100 \%} = -50 + 260 + 600 = 810$ Vidutinis tiriamųjų bendro (visuose trijuose miestuose) mirtingumo padidėjimas / sumažėjimas (procentais) lygus: $\frac{810}{1000 + 2000 + 3000} \cdot 100 = \frac{810}{60} = 13,5 \%$	2	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (vidurkio / svertinio vidurkio formulės pritaikymą). 1 taškas – už teisingai užrašytą vidurkio skaitiklį, 1 taškas – už teisingai užrašytą vidurkio vardiklį.
Ats.: 13,5% .	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Prisiminkite, kaip nustatomas dviejų skaičių aritmetinis vidurkis.

2 užuomina. Kad apskaičiuotumėte dviejų skaičių aritmetinį vidurkį, sudėkite juos ir padalykite iš dviejų. Kokį rezultatą gausite? Kokiais vienetais matuojamas gautas rezultatas? Nepamirškite jų paminėti.

2 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite, kiek per visus tris miestus iš viso yra tiriamųjų.

2 užuomina. Pagalvokite, kaip nustatyti tokio didelio kiekio žmonių mirtingumo pokyčio vidurkį? Kiekvienos žmonių grupės mirtingumo pokyčio reikšmę padauginkite iš tos grupės tiriamųjų skaičiaus ir sudėkite visų trijų grupių rezultatus. Padalykite gautą dydį iš visų trijų grupių bendro tiriamųjų skaičiaus ir gausite ieškomą bendrą vidurkį.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Duomenys ir tikimybės	Duomenys ir jų interpretavimas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	2
2			Duomenys ir jų interpretavimas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Aukštesnysis	3

Medicininiai diagnostiniai modeliai

Bendroji įvestis

Šiuolaikinė medicina vis dažniau remiasi dirbtiniu intelektu (DI), kuris padeda diagnozuoti ligas ir analizuoti pacientų duomenis. Neuroniniai tinklai gali peržiūrėti tūkstančius rentgeno nuotraukų, kraujo tyrimų rezultatų ar genetinių duomenų ir pasiūlyti galimas diagnozes.

Tačiau šie modeliai nėra tobulai tikslūs. Kaip ir gydytojai, jie gali padaryti dvi pagrindines klaidas:

- **Klaidingai teigiamas rezultatas** (KT) – kai sveikam pacientui diagnozuojama, kad jis serga, nors taip nėra. Dėl to gali kilti nerimas, gali būti skiriami nereikalingi papildomi tyrimai ir gydymas.
- **Klaidingai neigiamas rezultatas** (KN) – kai nenustatoma, kad sergantis pacientas serga. Tai pavojingiausia klaida, nes žmogus gali negauti būtino gydymo.

Abi šios klaidos vadinamos diagnozės klaidomis. Diagnozės tikslumui įvertinti naudojami du pagrindiniai rodikliai:

- **Jautrumas** (angl. *sensitivity*) – tikimybė, kad sergantis pacientas atpažintas teisingai.
- **Specifiškumas** (angl. *specificity*) – tikimybė, kad sveikas pacientas teisingai identifiкуotas kaip nesergantis.

Užduotys

1 užduotis

Ligoninė įsigijo naują DI paremtą prietaisą, kuris pagal nuotraukas padeda nustatyti, ar žmogus serga odos ligomis. Medikai nori patikrinti šio prietaiso tikslumą, todėl sugalvojo atlikti testą ir surinko dvi tiriamųjų grupes. A grupėje buvo atrinkta 50 asmenų, kurie serga odos ligomis. B grupėje buvo atrinkta 50 sveikų asmenų. Prietaisas ištyrė visus 100 asmenų. Gauti tokie rezultatai:

- A grupėje prietaisas nustatė 42 sergančius ir 8 sveikus asmenis.
- B grupėje prietaisas nustatė 6 sergančius ir 44 sveikus asmenis.

Pagal šiuos duomenis apskaičiuokite:

Kiek rezultatų yra klaidingai teigiami?

Kiek rezultatų yra klaidingai neigiami?

Koks buvo prietaiso jautrumas ir specifiškumas atliekant šį testą?

2 užduotis

Ligoninė nori įsigyti prietaisą, kuris padėtų diagnozuoti vieną itin retą ligą. Ligoninė renkasi iš dviejų prietaiso variantų P1 ir P2. Su abiem prietaisais atliekamas testas, kuriuo siekiama patikrinti jų tikslumą. Buvo sudaryta A grupė, kurioje yra 10 šia liga sergančių asmenų. Taip pat sudaryta B grupė, kurioje yra 10 šia liga nesergančių asmenų.

Matuojant su P1, gauti tokie rezultatai:

- A grupėje prietaisas P1 nustatė 8 sergančius ir 2 sveikus asmenis.
- B grupėje prietaisas P1 nustatė 1 sergantį ir 9 sveikus asmenis.

Matuojant su P2, gauti tokie rezultatai:

- A grupėje prietaisas P2 nustatė 9 sergančius ir 1 sveiką asmenį.
- B grupėje prietaisas P2 nustatė 3 sergančius ir 7 sveikus asmenis.

Remkitės šiais duomenimis ir pagrįskite, kuris prietaisas yra tikslesnis kiekvienu atveju:

Jeigu vertintume tikslumą pagal bendrą klaidų skaičių?

Jeigu vertintume tikslumą pagal tai, kiek sveikų pacientų gavo klaidingą diagnozę?

Jeigu vertintume tikslumą pagal tai, kiek sergančių pacientų gavo klaidingą diagnozę?

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
Iš 50 sveikų asmenų 6 nustatyti kaip sergantys, todėl klaidingai teigiamų rezultatų yra 6.	1	Už gautą teisingą atsakymą, kiek yra klaidingai teigiamų rezultatų.
Iš 50 sergančių asmenų 8 nustatyti kaip sveiki, todėl klaidingai neigiamų rezultatų yra 8.	1	Už gautą teisingą atsakymą, kiek yra klaidingai neigiamų rezultatų.
Iš 50 sergančių asmenų 42 nustatyti kaip sergantys, todėl prietaiso jautrumas atliekant šį testą yra: $\frac{42}{50} = 0,84 = 84 \%$.	1	Už gautą teisingą atsakymą, koks yra prietaiso jautrumas.
Iš 50 sveikų asmenų 44 nustatyti kaip sveiki, todėl prietaiso specifiškumas atliekant šį testą yra: $\frac{44}{50} = 0,88 = 88 \%$.	1	Už gautą teisingą atsakymą, koks yra prietaiso specifiškumas.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Prietaisas P1 padarė 3 klaidas, o prietaisas P2 padarė 4 klaidas. Kadangi $3 < 4$, pagal bendrą klaidų skaičių tikslesnis prietaisas P1.	1	Už teisingai gautą ir pagrįstą atsakymą, kuris prietaisas tikslesnis pagal bendrą klaidų skaičių.
Prietaisas P1 gavo 1 klaidingai teigiamą rezultatą, o prietaisas P2 gavo 3 klaidingai teigiamus rezultatus. Kadangi $1 < 3$, pagal klaidingai teigiamus rezultatus tikslesnis prietaisas P1.	1	Už teisingai gautą ir pagrįstą atsakymą, kuris prietaisas tikslesnis pagal klaidingai teigiamus rezultatus.
Prietaisas P1 gavo 2 klaidingai neigiamus rezultatus, o prietaisas P2 gavo 1 klaidingai neigiamą rezultatą. Kadangi $2 > 1$, pagal klaidingai neigiamus rezultatus tikslesnis prietaisas P2.	1	Už teisingai gautą ir pagrįstą atsakymą, kuris prietaisas tikslesnis pagal klaidingai neigiamus rezultatus.
Pastabos		
Kad būtų skiriami taškai, kiekvienas atsakymas turi būti pagrįstas skaičiais.		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Perskaitykite sąlygoje pateiktus klaidingai teigiamų ir klaidingai neigiamų rezultatų apibrėžimus. Kiek iš 50 sveikų asmenų buvo nustatyti kaip sergantys? Apskaičiuokite šį dydį ir rasite, kiek yra klaidingai teigiamų rezultatų. Tuo pačiu būdu rasite ir klaidingai neigiamus rezultatus – pagal tai, kiek iš 50 sergančių asmenų buvo nustatyti kaip sveiki.

2 užuomina. Kokia procentinė dalis sergančių asmenų nustatyti kaip sergantys? Kokia procentinė dalis sveikų asmenų nustatyti kaip sveiki? Pagal šiuos dydžius nustatykite prietaiso jautrumą ir specifiškumą.

2 užduotis

1 užuomina. Nustatykite abiejų prietaisų padarytas klaidas ir kiekvienos klaidos tipą.

2 užuomina. Palyginkite kiekvieno prietaiso klaidingai teigiamų rezultatų, klaidingai neigiamų rezultatų ir bendrą klaidų skaičių. Kuris prietaisas tikslesnis kiekvienu atveju?

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrūpis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Duomenys ir tikimybės	Duomenys ir jų interpretavimas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	4
2			Duomenys ir jų interpretavimas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Pagrindinis	3

Drabužių deriniai kelionėms

Bendroji įvestis

Ruošiantis kelionei, tenka nuspręsti, kiek ir kokių drabužių imti. Norisi turėti įvairių rūbų, tačiau lagamine vietos nedaug. Kiekvienas keliautojas ir keliautoja svarsto, kokius drabužius imti, kad jie derėtų tarpusavyje, tiktų įvairioms progoms ir užimtų kuo mažiau vietos. Paprastai aprangos rinkinį sudaro:

- kelnės arba sijonas,
- marškinėliai arba palaidinė,
- avalynė.

Kaip pasirinkti optimalų variantą, kad būtų kuo daugiau drabužių derinių – t. y. aprangos kombinacijų, su kuo mažiau rūbų? Panagrinėkime kelias situacijas.

Užduotys

1 užduotis

Tomas vyksta į savaitgalio išvyką ir pasiima 3 kelnės (džinsus, sportines kelnės ir šortus), 4 marškinėlius ir 2 poras batų (sportinius batelius ir basutes).

Kiek skirtingų aprangos kombinacijų su šiais drabužiais Tomas gali sudaryti? Laikykite, kad aprangos kombinacija – tai batai, kelnės ir marškinėliai. Kombinacijos laikomos skirtingomis, jei skiriasi bent vienas iš elementų (batai, kelnės, marškinėliai).

2 užduotis

Aistė nori keliauti su kuo mažesniu bagažu, todėl renkasi universalius drabužius. Ji turi 2 kelnės, 1 marškinėlius, 2 poras batų ir 1 ypatingą suknelę, kurią galima dėvėti vieną (tuomet nereikia marškinėlių ir kelnų) arba surištą (tuomet nereikia marškinėlių, bet reikia kelnų). Kiek skirtingų aprangos kombinacijų gali sudaryti Aistė, jei kiekvienoje kombinacijoje turi būti batai ir viršutiniai drabužiai (tik suknelė arba marškinėliai su kelnėmis)?

3 užduotis

Ieva ruošiasi į kelionę, kurios metu lankysis dviejose labai skirtingo klimato vietovėse: šaltame regione, kur reikės šiltesnių drabužių, ir karšto klimato saloje, kur reikės lengvų rūbų.

Ji gali pasiimti tik 7 drabužių vienetų, tačiau turi užtikrinti, kad:

- 2 drabužiai tiktų šaltiems orams (pvz., megztinis, šiltesnės kelnės);
- 2 drabužiai tiktų karštam klimatui (pvz., šortai, plona palaidinė);

- kiti drabužiai turi būti universalūs.

Leva renkasi iš šių drabužių:

- **šaltam orui:** storas megztinis, šilta striukė, ilgos vilnonės kelnės;
- **karštam orui:** šortai, lengva suknelė, plona palaidinė;
- **universalūs drabužiai:** džinsai, sportinės kelnės, marškinėliai, suknelė.

Leva nori turėti kuo daugiau aprangos kombinacijų ir būti užtikrinta, kad turės tinkamus drabužius ir šaltam, ir karštam orui. Kiek skirtingų būdų pasiimti tokius 7 drabužius ji turi, jei negalima imti 2 ar daugiau to paties tipo drabužių (pvz., negalima imti 2 storų megztinių)?

Atliekant šią užduotį reikia atsižvelgti tik į drabužių tinkamumą skirtingam orui, tačiau ne į jų tarpusavio suderinamumą (pvz., leva gali neimti nė vienos striukės ar marškinėlių).

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Skaičiuojame, kiek rinkinių su 3 elementais galima sudaryti, kai pirmajam elementui parinkti yra 3 būdai, antrajam elementui parinkti yra 4 būdai, o trečiajam elementui parinkti yra 2 būdai. Taigi, pagal kombinatorinę daugybos taisyklę Tomas gali sudaryti skirtingų aprangos kombinacijų: $3 \cdot 4 \cdot 2$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
Ats.: 24.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	3	
Jei Aistė nedėvi ypatingos suknelės, tuomet ji turi 2 būdus pasirinkti batus ir 2 būdus pasirinkti kelnes. Taigi, pagal kombinatorinę daugybos taisyklę rinkinių su 2 elementais galima sudaryti $2 \cdot 2 = 4$. Todėl Aistė turi 4 kombinacijas, kaip apsirengti.	1	Už apskaičiuotą variantų skaičių be ypatingos suknelės dėvėjimo.
Jei Aistė ypatingą suknelę dėvi vieną, tuomet ji gali pasirinkti tik batus, todėl yra 2 aprangos kombinacijos (1 pora batų iš 2). Dėvėdama surištą suknelę, Aistė gali pasirinkti batus (1 iš 2) ir kelnes (1 iš 2), todėl pagal kombinatorinę daugybos taisyklę yra $2 \cdot 2 = 4$ aprangos kombinacijos (batai ir kelnės). Pagal kombinatorinę sudėties taisyklę, dėvint ypatingą suknelę vieną arba surištą, iš viso yra $2 + 4 = 6$ aprangos kombinacijos.	1	Už apskaičiuotą variantų skaičių dėvint ypatingą suknelę.
Jei dėvint suknelę yra 6 aprangos kombinacijos, o jos nedėvint yra 4 aprangos kombinacijos, tuomet pagal kombinatorinę sudėties taisyklę iš viso yra $6 + 4 = 10$ aprangos kombinacijų (dėvint arba nedėvint suknelės). Ats.: 10 kombinacijų.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

3 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	5	

Skaiciuojame, kiek yra būdų parinkti 2 drabužius iš 3 karštam orui, kiek skirtingų rinkinių su 2 elementais (tvarka nesvarbi) galima sudaryti, renkantis iš 3 elementų. Skirtingų kombinacijų yra: $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3.$	1	<i>Už apskaičiuotą kombinacijų kiekį karštam orui, taikant kombinatorinę daugybos taisyklę rinkiniui be pasikartojimų.</i>
Skaiciuojame, kiek yra būdų parinkti 2 drabužius iš 3 šaltam orui, taigi, kiek skirtingų rinkinių su 2 elementais (tvarka nesvarbi) galima sudaryti, renkantis iš 3 elementų. Skirtingų kombinacijų yra: $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3.$	1	<i>Už apskaičiuotą kombinacijų kiekį šaltam orui, taikant kombinatorinę daugybos taisyklę rinkiniui be pasikartojimų.</i>
Skaiciuojame, kiek yra būdų parinkti 3 universalius drabužius iš 4, taigi, kiek skirtingų rinkinių su 3 elementais (tvarka nesvarbi) galima sudaryti, renkantis iš 3 elementų. Skirtingų kombinacijų yra: $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4.$	1	<i>Už apskaičiuotą universalių drabužių kombinacijų kiekį, taikant kombinatorinę daugybos taisyklę rinkiniui be pasikartojimų.</i>
Todėl pagal kombinatorinę sandaugos taisyklę skirtingų kombinacijų iš viso yra: $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$	1	<i>Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (kombinatorinės daugybos taisyklės pritaikymą).</i>
Ats.: 36.	1	<i>Už gautą teisingą atsakymą.</i>

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Kiek yra būdų pasirinkti batus, kelnes ir marškinėlius, jei kiekvieną iš jų Tomas dėvės po vieną vieneta?

2 užuomina. Kokį rezultatą gausime, jei sudauginsime galimus batų, kelnių ir marškinėlių pasirinkimo būdus?

2 užduotis

1 užuomina. Apskaičiuokite, keliais būdais Aistė gali apsirengti, jeigu nesirengs ypatingos suknelės.

2 užuomina. Atskirai išnagrinėkite, keliais būdais Aistė gali apsirengti, jeigu pasirenks ypatingą suknelę. Nagrinėkite 2 atvejus – jeigu suknelę nešios vieną ir jeigu ją nešios surištą.

3 užuomina. Sudėkite visus gautus derinius, kai Aistė: nesirengia ypatingos suknelės; rengiasi ypatingą suknelę vieną; rengiasi ypatingą suknelę surištą.

3 užduotis

1 užuomina. Kai apskaičiuosite, kiek yra būdų parinkti drabužius iš kiekvieno tipo, sudauginkite juos ir gausite bendrą kombinacijų skaičių.

2 užuomina. Kiek yra būdų parinkti: 2 drabužius iš 3 karštam orui; 2 drabužius iš 3 šaltam orui; 3 iš 6 universalius drabužius? Nepamirškite, kad čia jų parinkimo tvarka nėra svarbi.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Duomenys ir tikimybės	Tikimybės ir jų interpretavimas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Tikimybės ir jų interpretavimas	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Pagrindinis	3
3			Tikimybės ir jų interpretavimas	Matematinis problemų sprendimas	Problemų sprendimas	AMG	Aukštesnysis	5

Slaptažodžių stiprumas

Bendroji įvestis

Daug interneto naudotojų pasirenka trumpus ir lengvai įsimenamus slaptažodžius, tačiau tokie slaptažodžiai yra nesaugūs. Tyrimai rodo, kad vieni dažniausiai naudojamų slaptažodžių yra „123456“, „password“, „qwerty“. Šiuos slaptažodžius galima atspėti per kelias milisekundes. Programišiai naudoja įvairius metodus, kad išbandytų daugybę galimų slaptažodžių per trumpą laiką.

Slaptažodžių stiprumas priklauso nuo jų ilgio, simbolių įvairovės ir atsitiktinumo. Kuo slaptažodis ilgesnis ir sudėtingesnis, tuo daugiau galimų kombinacijų reikia patikrinti, todėl programišiams prireikia daugiau laiko jį nulaužti. Skaičiuojant slaptažodžių, kuriuos turėtų perrinkti kibernetiniai nusikaltėliai, maksimalų kiekį, galima naudoti kombinatorikos metodus, atsižvelgiant į tai, kiek simbolių gali būti kiekvienoje pozicijoje ir ar simboliai gali kartotis.

Užduotys

1 užduotis

Daugelis sistemų naudoja 4 skaitmenų PIN kodus. Kiek skirtingų PIN kodų galima sudaryti, jei skaitmenys gali įgyti reikšmes nuo 0 iki 9, tačiau visi 4 skaitmenys turi būti skirtingi?

2 užduotis

Trys skirtingos slaptažodžių pasirinkimo sistemos leidžia naudotojams kurti slaptažodžius pagal tam tikras taisykles. Naudokitės skaičiuotuvu ar kitomis išorinėmis skaičiavimo priemonėmis ir palyginę jų saugumą nustatykite, kuri sistema siūlo **stipriausių slaptažodžių kūrimo tvarką** (sunkiausiai nulaužiamus slaptažodžius). Atsakymą argumentuokite.

A sistema: leidžiamas 9 simbolių slaptažodis: naudojamos tik 26 didžiosios raidės ir 10 skaitmenų (nuo 0 iki 9).

B sistema: leidžiamas tik 7 simbolių slaptažodis, tačiau galima naudoti mažąsias, didžiąsias raides, skaičius ir specialiuosius simbolius (iš viso 72 simboliai vienoje pozicijoje).

C sistema: reikalaujamas 10 simbolių slaptažodis. Galima naudoti tik mažąsias raides (26 simboliai).

Vertinimo instrukcija

1 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	2	
Pirmam skaitmeniui galimi 10 pasirinkimų (skaitmenys nuo 0 iki 9). Antram skaitmeniui lieka 9 pasirinkimai. Trečiam – 8 pasirinkimai. Ketvirtam – 7 pasirinkimai. Pagal kombinatorikos daugybos taisyklę bendras variantų skaičius: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą (nustatytą pasirinkimų skaičių kiekvienam skaitmeniui).
Apskaičiuojame: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ PIN kodų. Ats.: galima sudaryti 5040 skirtingų PIN kodų.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Pastabos		

2 užduoties vertinimas		
Sprendimas ir/arba atsakymas	Taškai	Taškų paaiškinimas
	4	
A sistema: 9 simboliai, kiekvienas gali būti vienas iš 36 (raidės ir skaičiai). Naudojamės skaičiuotuvu ir gauname atsakymą: $36^9 \approx 1,0156 \cdot 10^{14}$.	1	Už apskaičiuotą slaptažodžių skaičių A sistemai.
B sistema: 7 simboliai, kiekvienas iš 72 (mažosios, didžiosios raidės, skaičiai, simboliai). Naudojamės skaičiuotuvu ir gauname atsakymą: $72^7 \approx 1,3906 \cdot 10^{13}$.	1	Už apskaičiuotą slaptažodžių skaičių B sistemai.
Sistema C: 10 simbolių, kiekvienas iš 26 (mažosios raidės). Naudojamės skaičiuotuvu ir gauname atsakymą: $26^{10} \approx 1,4140 \cdot 10^{14}$.	1	Už apskaičiuotą slaptažodžių skaičių C sistemai.
Išvada: C sistema turi daugiausiai galimų slaptažodžių (daugiau nei A ir B), todėl yra stipriausia. Ats.: stipriausia slaptažodžių sistema yra C, nes joje galimų slaptažodžių skaičius didžiausias.	1	Už gautą teisingą išvadą.
Pastabos		

Užuominos mokiniui

1 užduotis

1 užuomina. Kiek yra galimų variantų pasirinkti pirmą skaitmenį? Jei skaitmenys negali kartotis, kiek variantų yra pasirinkti antrą skaitmenį? Trečią? Ketvirtą?

2 užuomina. Pasinaudokite kombinatorikos daugybos taisykle ir apskaičiuokite, kiek skirtingų slaptažodžių galima sudaryti iš 4 skaitmenų, jeigu skaitmenys negali kartotis.

2 užduotis

1 užuomina. Kiekvienos sistemos atveju apskaičiuokite, kiek yra galimų skirtingų slaptažodžių. Pasinaudokite moksliniu skaičiuotuvu arba išorinėmis skaičiavimo priemonėmis. Pagal gautus dydžius nustatykite, kuri sistema turi daugiausia galimų slaptažodžių.

2 užuomina. Sakykime, slaptažodį sudaro n simbolių, kurie gali kartotis. Be to, kiekvieną simbolį galima parinkti iš k variantų. Tuomet skirtingų slaptažodžių galima sudaryti: n^k . Pagal šią formulę apskaičiuokite, kiek slaptažodžių galima sudaryti kiekvienos sistemos atveju. Nustatykite, kuris iš gautų rezultatų yra didžiausias ir pagal tai padarykite išvadą.

Metaduomenys

Nr.	Klasė	BP Sritis	Tema	MS gebėjimų pogrupis	Pasiekimų sritis	Gebėjimų sritis	Pasiekimų lygis	Taškai
1	10	Duomenys ir tikimybės	Tikimybės ir jų interpretavimas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Patenkinamas	2
2			Tikimybės ir jų interpretavimas	Matematinis komunikavimas	Matematinis komunikavimas	AMG	Aukštesnysis	4